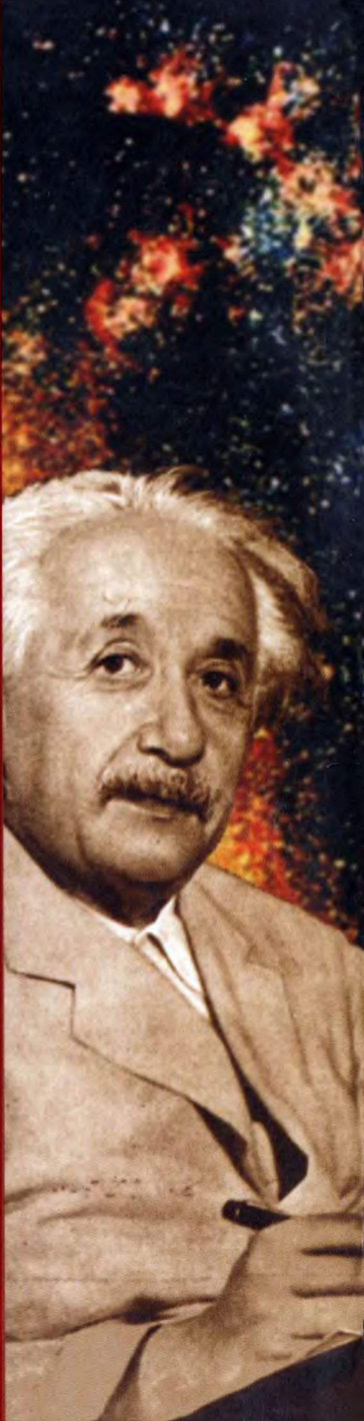
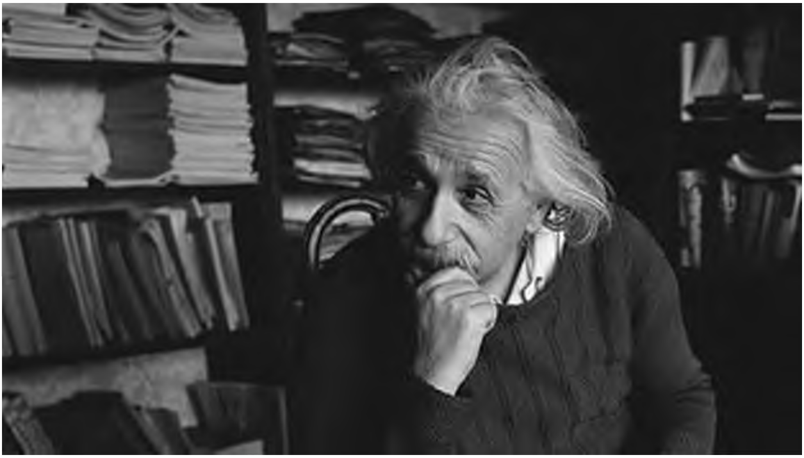
А. Эйнштейн

ПРИНСТОНСКИЕ ЛЕКЦИИ





The Meaning of Relativity

by

A. Einstein

Princeton University Press
Princeton, N. Y., 1921

Альберт Эйнштейн

ПРИНСТОНСКИЕ ЛЕКЦИИ

Москва ♦ Ижевск

2002

УДК 539

Эйнштейн А.
Принстонские лекции. — Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002, 220 стр.

Книга представляет собой наиболее известные лекции А. Эйнштейна по теории относительности, несколько раз издававшиеся на Западе и выходившие в России в собрании сочинений Эйнштейна (а также отдельным изданием в 1923 и 1935 годах). Настоящее издание является наиболее полным и включает два приложения А. Эйнштейна, сделанные им к различным изданиям.

Для студентов, аспирантов, физиков и математиков, специалистов.

ISBN 5-93972-173-7

http://rcd.ru

Оглавление

От редакции

Предлагаемая вниманию читателя книга впервые вышла на английском языке в издании Принстонского университета (США), где в мае 1921 г. были прочитаны лекции Эйнштейна.

Немецкое издание вышло годом позже (1922 г.) под названием: «Vier Vorlesimgen über Relativitätheorie, gehalten in Mai, 1921 an der Universität Princeton» (Vieweg, Braunschweig). Во втором принстонском издании 1945 г. было добавлено приложение I «О космологической проблеме» (это издание было повторено в Англии в 1946 г.).

Третье принстонское издание (1945 г.) содержало второе приложение, посвященное единой теории поля. Это приложение было полностью переработано в четвертом принстонском издании (1953 г.), в котором еще была сделана отдельная вкладка (в таком виде оно приведено в настоящей книге). В пятом издании приложение II полностью переработано.

Русский перевод первого издания выходил дважды под названием «Основы теории относительности» (издательство «Сеятель», Пг., 1923 и М.-Л., ГТТИ, 1935). Также был сделан русский перевод с четвертого издания («Сущность теории относительности», М.: ИЛ, 1955).

В Англии выходило пять изданий. Пятое английское издание вышло в 1955 г. (Metheun, London, 1955). Оно повторяет четвертое принстонское издание.

Существуют переводы на польский язык (1923 г.), французский (1924 г.), испанский (1948 г.).

«Сущность теории относительности», кроме педагогического значения, замечательна тем, что в ней отражены этапы развития идей Эйнштейна и, в частности, его взглядов на общий принцип относительности и на связь этого принципа с вопросами космологии. В основном тексте книги Эйнштейн приходит к выводу о необходимости пространственной ограниченности мира и необходимости введения отрицательного давления — космологической постоянной.

В приложении ко второму изданию Эйнштейн рассматривает уже все решения уравнений тяготения и отбрасывает космологическую постоянную. После признания работы Фридмана (*Notiz zu der Bemerkung zu der Arbeit von A. Friedmann «Über die Krümming des Raumes»*. Z. Phys., 1923, **16**, 228.) Эйнштейн оставляет идею статической Вселенной. Приложение II, несколько раз переделывавшееся, отражает изменяющиеся взгляды на возможность включения электромагнитных полей в геометрическую схему.

На клапане суперобложки 4-го издания помещено следующее высказывание Эйнштейна:

«Теорию относительности можно рассматривать как итог борьбы с фундаментальным представлением физики Галилея и Ньютона, а именно, представлением об «инерциальной системе». Пересмотр основ теории был вызван существенными результатами электромагнитных и оптических экспериментов. Прежде лишь очень немногие были серьезно озабочены призрачным понятием инерциальной системы. Лейбниц, Ньютон, Риман и Э. Мах были теми мыслителями, которые ясно обнаруживали интерес к этой проблеме.

Специальная теория относительности установила связь между преобразованиями в инерциальных системах координат и законом постоянства скорости света; этот вопрос не вызывает сейчас сомнения — после результатов, полученных в исследованиях Г. А. Лоренца по электродинамике движущихся тел. Эта первая фаза теории относительности представлялась физикам того времени революционной, в особенности потому, что она отбросила понятие одновременности; теория, однако, оставила нетронутым независимый, объективный характер инерциальной системы.

Общая теория относительности впервые уничтожила инерциальную систему, заменив ее «полем смещений». После этого пространство потеряло свое независимое существование и стало в значительной степени свойством поля. Без опытного факта эквивалентности инертной и гравитационной масс вряд ли было бы возможно психологически ликвидировать инерциальную систему, несмотря на то, что в наших руках был готовый аппарат в форме римановской теории метрического континуума и понятой Минковским формальной эквивалентности трех пространственных измерений и времени.

Последний шаг теории состоит в унификации понятия поля, характеризуемой переходом к несимметричным полям. Трудности выбора законов поля были полностью преодолены в последние несколько месяцев. Аргументы, существенные для понимания этого, подробно изложены в Приложении II».

Такую же уверенность в близости завершения теории Эйнштейн высказывает и в статье *On the Generalized Theory of Gravitation*, Sci. Amer., 1950, **182**, 13–17. Однако этим надеждам не суждено было осуществиться.

Пятое издание «Сущности теории относительности» вышло в год смерти Эйнштейна (он умер 18 апреля 1955 г). Приложение II к этому изданию — последняя опубликованная работа автора. На русском языке оно было опубликовано только в *Собрании научных трудов* Альберта Эйнштейна, М.: Наука, 1966, где также содержаться все публикуемые здесь материалы. К сожалению, это собрание трудов давно стало малодоступным и мы надеемся, что настоящее их издание будет также востребованным и способным возбудить новую волну интереса к классическим и непревзойденным работам Эйнштейна.

Лекция 1

ПРОСТРАНСТВО И ВРЕМЯ В ДОРЕЛЯТИВИСТСКОЙ ФИЗИКЕ

Теория относительности теснейшим образом связана с учением о пространстве и времени. Я начну поэтому с краткого исследования происхождения наших представлений о пространстве и времени, хотя отдаю себе отчет в том, что при этом касаюсь спорного предмета. Целью всякой науки, будь то естествознание или психология, является согласование между собой наших ощущений и сведение их в логическую систему. Как связаны наши привычные представления о пространстве и времени с характером наших ощущений?

Ощущения человека предстают перед нами как некоторая последовательность событий; в этой последовательности отдельные события, возникающие в нашей памяти, представляются нам упорядоченными критериями «раньше» и «позже», которые не удается подвергнуть дальнейшему анализу. Таким образом, для индивидуума существует «свое», или субъективное время («Ich-Zeit»). Само по себе оно не поддается измерению. Я могу, конечно, сопоставить события с числами таким образом, чтобы более позднему событию соответствовало большее число, но характер такого сопоставления остается совершенно произвольным. Я могу установить такое соответствие при помощи часов, сравнивая порядок событий, устанавливаемых часами, с порядком в данной последовательности событий. Под часами мы понимаем некоторый объект, воспроизводящий последовательность событий, которые можно пересчитать, и обладающий другими свойствами, о которых будет говориться ниже.

При помощи речи различные люди могут до некоторой степени сравнивать свои ощущения. При этом выясняется, что некоторые чувственные восприятия различных индивидуумов находятся в соответствии друг с другом, тогда как для других чувственных восприятий такого соответствия установить нельзя. Мы привыкли считать реальными такие чувственные восприятия, которые совпадают у различных индивидуумов и которые являются поэтому до известной степени внеличными. С такими чувственными восприятиями имеют дело естественные науки и, в частности, наиболее фундаментальная из них — физика. Представление о физическом теле, в частности о твердом теле, является относительно устойчивым комплексом таких чувственных восприятий. Часы — тоже тело или система в указанном смысле, но они обладают тем дополнительным свойством, что последовательность отсчитываемых ими событий состоит из элементов, которые можно рассматривать как равные.

Наши понятия и системы понятий оправданы лишь постольку, поскольку они служат для выражения комплексов наших ощущений; вне этого они неправомерны. Я убежден, что философы оказали пагубное влияние на развитие научной мысли, перенеся некоторые фундаментальные понятия из области опыта, где они находятся под нашим контролем, на недосягаемые высоты априорности. Ибо, если бы даже оказалось, что мир идей нельзя вывести из опыта логическим путем, а что в определенных пределах этот мир ость порождение человеческого разума, без которого никакая наука невозможна, все же он столь же мало был бы независим от природы наших ощущений, как одежда — от формы человеческого тела. Это в особенности справедливо по отношению к понятиям пространства и времени. Под давлением фактов физики были вынуждены низвергнуть их с Олимпа априорности, чтобы довести их до состояния, пригодного для использования.

Мы подходим теперь к нашему пониманию пространства и суждения о нем. Здесь также важно обратить особое внимание на отношение опыта к нашим понятиям. Мне кажется, что Пуанкаре ясно видел перед собой истину, когда писал свою книгу «Наука и гипотеза»[1]. Среди всех изменений, которые мы можем обнаружить в твердом теле, выделяются своей простотой те, которые можно произвести обратимым образом при помощи произвольного движения тела; Пуанкаре называет их изменениями положения. При помощи простых изменений положения мы можем привести два тела в соприкосновение. Теоремы конгруентности, имеющие фундаментальное значение в геометрии, выражают законы, управляющие этими изменениями положения. Для понятия пространства, по-видимому, существенно следующее: прикладывая тела B, C,... к телу A, мы можем образовывать новые тела; мы говорим, что мы *продолжаем* тело A. Тело A можно продолжить так, что оно соприкоснется с любым другим телом X. Совокупность всех продолжений тела A мы можем назвать «пространством тела A». Тогда справедливо утверждение, что все тела находятся в «пространстве (произвольно выбранного) тела A». В этом смысле мы не вправе говорить вообще, а только о «пространстве, относящемся к телу A». Земная кора играет настолько важную роль в нашей повседневной жизни при определении относительных положений тел, что это привело к абстрактному понятию пространства, которое, конечно, не выдерживает критики. Чтобы освободиться от этой фатальной ошибки, мы будем говорить только о «телах отсчета» или «пространстве отсчета». Как мы увидим дальше, лишь в общей теории

[1] А. Пуанкаре. Наука и гипотеза. СПб., 1906. Перевод со 2-го, исправленного французского издания. — *Прим. ред.*

относительности потребуется уточнение этих понятий.

Я не стану подробно останавливаться на свойствах пространства отсчета, которые приводят нас к пониманию точки как элемента пространства, а пространства — как континуума. Я не буду также пытаться глубже анализировать те свойства пространства, которые оправдывают представление о непрерывных последовательностях точек, или линиях. Если считать эти понятия и их связь с существующими твердыми телами заданными, то легко выразить, что мы подразумеваем под трехмерностью пространства. Каждой точке можно поставить в соответствие три числа x_1, x_2, x_3 (координаты) таким образом, чтобы это соответствие было взаимно однозначным, и x_1, x_2 и x_3 менялись бы непрерывно, когда точка пробегает непрерывную последовательность точек (линию).

В дорелятивистской физике считалось, что законы ориентации абсолютно твердых тел находятся в соответствии с евклидовой геометрией. Смысл этого можно выразить следующим образом. Две точки, отмеченные на твердом теле, определяют *интервал*. Такой интервал можно в нашем пространстве отсчета ориентировать в состоянии покоя множеством способов. Если теперь возможно сопоставить точки пространства с координатами x_1, x_2, x_3 так, чтобы разности координат Δx_1, Δx_2, Δx_3 двух концов интервала образовали одинаковую сумму квадратов

$$s^2 = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 \tag{1}$$

при любой ориентации интервала, то пространство отсчета называется евклидовым, а координаты — декартовыми[2]. В действительности достаточно, чтобы это допущение было справедливо в предельном случае бесконечно малого интервала. В высказанном

[2]Это соотношение должно выполняться при произвольном выборе начала координат и направления интервала (т. е. значения отношений $\Delta x_1 : \Delta x_2 : \Delta x_3$).

допущении содержится нечто более общее и фундаментальное по своему значению; на это мы должны обратить внимание читателя ввиду особой важности вопроса. Во-первых, предполагается, что абсолютно твердое тело можно перемещать произвольно. Во-вторых, принимается, что поведение абсолютно твердого тела по отношению к поворотам не зависит от вещества тела и изменений его положения в том смысле, что если два интервала однажды могли быть совмещены, то они всегда и всюду могут быть совмещены снова. Оба эти предположения, имеющие фундаментальное значение для геометрии и особенно для физических измерений, естественно, вытекают из опыта. В общей теории относительности достаточно предположить их справедливость для тел и пространств отсчета, бесконечно малых по сравнению с астрономическими размерами.

Величину s мы называем длиной интервала. Для однозначного определения этой величины необходимо зафиксировать произвольно длину какого-либо определенного интервала; например, мы можем положить ее равной 1 (единица длины). Тогда можно определить длины всех остальных интервалов. Если мы предположим, что x_ν линейно зависят от некоторого параметра λ:

$$x_\nu = a_\nu + \lambda b_\nu,$$

то получим линию, которая обладает всеми свойствами прямой линии евклидовой геометрии. В частности, легко видеть, что, откладывая n раз, интервал s вдоль прямой линии, мы получаем интервал длиной $n \cdot s$. Длина, таким образом, означает результат измерения, выполненного вдоль прямой линии при помощи единичного измерительного стержня. Как будет видно из дальнейшего, понятие длины в той же мере не зависит от системы координат, как и понятие прямой линии.

Мы подходим теперь к цепи рассуждений, играющих похожие роли как в специальной, так и в общей теории относительности. Поставим вопрос: существуют ли, кроме декартовых координат, которыми мы пользовались, другие эквивалентные системы координат? Интервал имеет физический смысл независимо от выбора координат; то же верно и относительно сферической поверхности, которую можно получить как геометрическое место концов равных интервалов, отложенных от некоторой произвольной точки нашего пространства отсчета. Если x_ν и x'_ν $(\nu = 1, 2, 3)$ являются декартовыми координатами в нашем пространстве отсчета, то сферическая поверхность будет задаваться в этих двух системах координат уравнениями:

$$\sum \Delta x_\nu^2 = \text{const}, \tag{2}$$

$$\sum \Delta x'^2_\nu = \text{const}. \tag{2a}$$

Как должны выражаться x'_ν через x_ν, чтобы уравнения (2) и (2a) были эквивалентны? Рассматривая x'_ν как функции от x_ν, мы можем записать, согласно теореме Тейлора, для малых значений

$$\Delta x'_\nu = \sum_\alpha \frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\alpha}\Delta x_\alpha + \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 x'_\nu}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}\Delta x_\alpha\,\Delta x_\beta + \ldots$$

Если подставим это соотношение в (2a) и сравним с (1), то увидим, что x'_ν должны быть линейными функциями от x_ν. Если, поэтому, положить

$$x'_\nu = a_\nu + \sum_\alpha b_{\nu\alpha} x_\alpha \tag{3}$$

или

$$\Delta x'_\nu = \sum_\alpha b_{\nu\alpha}\Delta x_\alpha, \tag{3a}$$

то эквивалентность уравнений (2) и (2a) выразится в форме условия:

$$\Delta x'^2_\nu = \lambda \sum \Delta x_\nu^2 \quad (\lambda \text{ не зависит от } \Delta x_\nu). \tag{2б}$$

Отсюда следует, что величина λ должна быть постоянной. Если мы положим $\lambda = 1$, то (2б) и (3а) приводят к условиям

$$\sum_{\nu} b_{\nu\alpha} b_{\nu\beta} = \delta_{\alpha\beta}, \tag{4}$$

где $\delta_{\alpha\beta} = 1$, если $\alpha = \beta$ и $\delta_{\alpha\beta} = 0$, если $\alpha \neq \beta$. Условия (4) называются условиями ортогональности, а преобразования (3) и (4) — линейными ортогональными преобразованиями. Если мы потребуем, чтобы $s^2 = \sum \Delta x_\nu^2$ равнялось квадрату длины во всякой системе координат, и если при измерении каждый раз будем пользоваться одним и тем же единичным масштабом, то λ должно быть равно 1. По этой причине линейные ортогональные преобразования являются единственными, при помощи которых мы можем переходить в нашем пространстве отсчета от одних декартовых координат к другим. Мы видим, что при таких преобразований уравнения прямой переходят также в уравнения прямой. Обращая равенства (3а) путем умножения обеих частей его на $b_{\nu\beta}$ и суммирования по всем ν, получаем

$$\sum_{\nu} b_{\nu\beta} \Delta x'_\nu = \sum_{\nu\alpha} b_{\nu\alpha} b_{\nu\beta} \Delta x_\alpha = \sum_{\alpha} \delta_{\alpha\beta} \Delta x_\alpha = \Delta x_\beta. \tag{5}$$

Те же самые коэффициенты b определяют также обратную подстановку Δx_ν. Геометрически $b_{\nu\alpha}$ представляет собой косинус угла между осями x'_ν и x_α.

Подводя итог, мы можем сказать, что в евклидовой геометрии существуют (в данном пространстве отсчета) избранные системы координат, а именно: декартовы системы, которые переходят одна в другую при линейных ортогональных преобразованиях. Расстояние s между двумя точками нашего пространства отсчета, измеренное при помощи измерительного стержня, выражается в таких координатах особенно просто. Всю геометрию можно построить на основе понятия расстояния. В нашем изложении геометрия связана с реальными предметами (твердыми телами) и ее теоремы, справедливость которых можно доказать или опровергнуть, являются утверждениями относительно поведения этих предметов.

Обычно принято изучать геометрию, отвлекаясь от какой-либо связи между ее понятиями и опытом. Есть свои преимущества в выделении вещей чисто логических и независимых от опыта, который по своей природе неполон. Это вполне может удовлетворить чистого математика. Он удовлетворен, если может вывести свои теоремы из аксиом корректно, т. е. без логических ошибок. Вопрос о том, справедлива ли евклидова геометрия или нет, его не касается. Но для наших целей необходимо связать основные понятия геометрии с объектами природы; без такой связи геометрия не имеет для физика никакой цены. Физика интересует вопрос, верны теоремы геометрии или нет? То, что евклидова геометрия с этой точки зрения содержит нечто большее, чем простые выводы, полученные из определений логическим путем, видно из следующего простого рассуждения.

Между n точками пространства существуют $\frac{n(n-1)}{2}$ расстояний $s_{\mu\nu}$; $s_{\mu\nu}$ и $3n$ координат связаны соотношениями

$$s_{\mu\nu}^2 = (x_{1(\mu)} - x_{1(\nu)})^2 + (x_{2(\mu)} - x_{2(\nu)})^2 + \dots$$

Из этих $\frac{n(n-1)}{2}$ соотношений можно исключить $3n$ координат, и тогда для $s_{\mu\nu}$ останется, по крайней мере, $\frac{n(n-1)}{2} - 3n$ соотношений[3]. Поскольку $s_{\mu\nu}$ — измеримые величины и по определению не зависят друг от друга, эти соотношения между величинами $s_{\mu\nu}$ не являются необходимыми априори.

---

[3]На самом деле останется $\frac{n(n-1)}{2} - 3n + 6$ соотношений.

Из предыдущего видно, что преобразования (3), (4) имеют фундаментальное значение в евклидовой геометрии, определяя переход от одной декартовой системы координат к другой. Декартовы координаты характеризуются тем свойством, что с их помощью измеримое расстояние между двумя точками s выражается соотношением

$$s^2 = \sum \Delta x_\nu^2.$$

Если $K_{(x_\nu)}$ и $K'_{(x'_\nu)}$ — две системы декартовых координат, то

$$\sum \Delta x_\nu^2 = \sum \Delta x'^2_\nu.$$

Правая часть этого соотношения тождественно равна левой в силу уравнений линейного ортогонального преобразования; при этом правая часть отличается от левой лишь тем, что x_ν заменены на x'_ν. Это обстоятельство выражается утверждением, что $\sum \Delta x_\nu^2$ есть инвариант по отношению к линейным ортогональным преобразованиям. Очевидно, что в евклидовой геометрии имеют объективное значение, не зависящее от выбора декартовых координат, те и только те величины, которые можно выразить как инварианты по отношению к линейным ортогональным преобразованиям. В этом заключается причина того, что теория инвариантов, которая имеет дело с законами, управляющими видом инвариантов, имеет такое значение в аналитической геометрии.

В качестве другого примера геометрического инварианта рассмотрим объем. Он выражается формулой

$$V = \iiint dx_1\, dx_2\, dx_3.$$

Пользуясь теоремой Якоби, можно написать

$$\iiint dx'_1\, dx'_2\, dx'_3 = \iiint \frac{\partial(x'_1, x'_2, x'_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)}\, dx_1\, dx_2\, dx_3.$$

Подынтегральное выражение в последнем интеграле есть функциональный определитель от x'_ν по x_ν, равный, согласно (3), определителю $|b_{\mu\nu}|$ из коэффициентов преобразования $b_{\nu\alpha}$. Если мы образуем определитель из $\delta_{\mu\alpha}$, то из соотношения (4), в силу теоремы об умножении определителей, получим

$$1 = |\delta_{\alpha\beta}| = \left|\sum_\nu b_{\nu\alpha} b_{\nu\beta}\right| = |b_{\mu\nu}^2|; \quad |b_{\mu\nu}| = \pm 1. \qquad (6)$$

Если мы ограничимся преобразованиями с определителем, равным $+1$ (а только такие и возникают при непрерывных изменениях систем координат)[4], то V — инвариант.

Инварианты, однако, не являются единственным средством, с помощью которого можно выразить независимость от частного выбора декартовых координат. Другие способы выражения дают векторы и тензоры. Попытаемся выразить тот факт, что точка с текущими координатами x_ν лежит на прямой. Мы имеем

$$x_\nu - A_\nu = \lambda B_\nu \quad (\nu = 1, 2, 3).$$

Не ограничивая общности, можно положить

$$\sum B_\nu^2 = 1.$$

Если мы умножим эти уравнения на $b_{\beta\nu}$ [ср. (3а) и (5)] и просуммируем по всем ν, то получим

$$x'_\beta - A'_\beta = \lambda B'_\beta,$$

[4]Существует, таким образом, два типа декартовых систем координат — так называемые «правые» и «левые» системы. Разница между ними хорошо знакома каждому физику и инженеру. Интересно отметить, что геометрически определить можно только различие между этими двумя типами систем, а не каждую из них саму по себе.

где

$$B'_\beta = \sum_\nu b_{\beta\nu} B_\nu; \quad A'_\beta = \sum_\nu b_{\beta\nu} A_\nu.$$

Это уравнение прямой линии в другой декартовой системе K'. Форма у них та же, что и у уравнений в исходной системе координат. Очевидно потому, что прямые линии имеют смысл, не зависящий от системы координат. Формально это связано с тем, что величины $(x_\nu - A_\nu) - \lambda B_\nu$ преобразуются как компоненты интервала, Δx_ν. Совокупность трех величин, определенных в каждой системе декартовых координат и преобразующихся как компоненты интервала, называется вектором. Если три компоненты вектора обращаются в нуль в одной системе декартовых координат, то они будут равны нулю и во всех прочих, так как уравнения преобразований однородны. Мы можем, таким образом, придать смысл понятию вектора без ссылок на геометрические образы. Поведение уравнений прямой линии можно выразить утверждением, что они ковариантны по отношению к линейному ортогональному преобразованию.

Покажем теперь кратко, что существуют геометрические объекты, приводящие к понятию тензора. Пусть P_0 — центр поверхности второго порядка, P — любая точка этой поверхности, а ξ_ν — проекции интервала P_0P на оси координат. Тогда уравнение поверхности будет иметь вид

$$\sum_{\mu,\nu} a_{\mu\nu} \xi_\mu \xi_\nu = 1.$$

В этом и аналогичных случаях мы будем опускать знак суммирования и подразумевать, что суммирование производится по всем индексам, повторяющимся дважды. Уравнение поверхности тогда запишется в виде

$$a_{\mu\nu} \xi_\mu \xi_\nu = 1.$$

Числа $a_{\mu\nu}$ полностью определяют поверхность при заданном расположении центра по отношению к выбранной системе координат. Из известного закона преобразования (3а) величин ξ_ν при линейных ортогональных преобразованиях мы легко найдем закон преобразования для $a_{\mu\nu}$[5]:

$$a'_{\sigma\tau} = b_{\sigma\mu} b_{\tau\nu} a_{\mu\nu}.$$

Это преобразование является однородным и первой степени по $a_{\mu\nu}$. На этом основании $a_{\mu\nu}$ называются компонентами тензора второго ранга (последнее — благодаря двум индексам). Если все компоненты $a_{\mu\nu}$ тензора в какой-либо декартовой системе координат, то они исчезают и во всех других декартовых системах. Тензором (a) описываются форма и положение поверхности второго порядка.

Можно определить также аналитические тензоры высшего ранга (т. е. с большим числом индексов). Можно и это даже удобно рассматривать векторы как тензоры первого ранга, а инварианты (скаляры) как тензоры нулевого ранга. В этом отношении задачу теории инвариантов можно сформулировать так: по каким правилам можно из данных тензоров образовать новые? Мы сейчас рассмотрим эти правила, чтобы иметь возможность применять их в дальнейшем. Сначала мы будем иметь дело только со свойствами тензоров по отношению к переходам от одной декартовой системы к другой в том же пространстве отсчета путем линейных ортогональных преобразований. Поскольку эти правила совершенно не зависят от числа измерений n, сначала мы оставим это число неопределенным.

Определение. Если в n-мерном пространстве отсчета фигура определяется по отношению к каждой декартовой системе координат n^α числами $A_{\mu\nu\rho\ldots}$

---

[5]Уравнение $a'_{\sigma\tau}\xi'_\sigma\xi'_\tau = 1$ можно, согласно (5), заменить на $a'_{\sigma\tau} b_{\mu\sigma} b_{\nu\tau} \xi'_\sigma \xi'_\tau = 1$, откуда немедленно следует приведенный результат.

(α — число индексов), то эти числа являются компонентами тензора ранга α, если они преобразуются по закону

$$A'_{\mu'\nu'\rho'\dots} = b_{\mu'\mu}b_{\nu'\nu}b_{\rho'\rho}\dots A_{\mu\nu\rho\dots}. \tag{7}$$

Замечание. Из этого определения следует, что величина

$$A_{\mu\nu\rho\dots}B_{\mu}C_{\nu}D_{\rho}\dots \tag{8}$$

является инвариантом, если (B), (C), $(D)\dots$ — векторы. Наоборот, если известно, что выражение (8) остается инвариантом при любом выборе векторов (B), (C) и т. д., то можно сделать вывод о тензорном характере A.

Сложение и вычитание. При сложении и вычитании соответствующих компонент тензоров одинакового ранга получается тензор того же ранга.

$$A_{\mu\nu\rho\dots} \pm B_{\mu\nu\rho\dots} = C_{\mu\nu\rho\dots}. \tag{9}$$

Доказательство следует из приведенного выше определения тензора.

Умножение. Из тензора ранга α и тензора ранга β можно составить тензор ранга $\alpha + \beta$, умножая каждую компоненту первого тензора на каждую компоненту второго

$$T_{\mu\nu\rho\dots\alpha\beta\gamma\dots} = A_{\mu\nu\rho\dots}B_{\alpha\beta\gamma\dots}. \tag{10}$$

Свертка. Из тензора ранга α можно получить тензор ранга $\alpha - 2$, полагая какие-либо два из его индексов равными и затем суммируя по ним

$$T_{\rho\dots} = A_{\mu\mu\rho\dots}\left(= \sum_{\mu} A_{\mu\mu\rho\dots}\right). \tag{11}$$

Это вытекает из следующих равенств:

$$a'_{\mu\mu\rho\dots} = b_{\mu\alpha}b_{\mu\beta}b_{\rho\gamma}\dots A_{\alpha\beta\gamma\dots} =$$
$$= \delta_{\alpha\beta}b_{\rho\gamma}\dots A_{\alpha\beta\gamma\dots} = b_{\rho\gamma}\dots A_{\alpha\alpha\gamma\dots}.$$

К этим простым правилам добавляется также образование тензоров путем дифференцирования («расширение»)

$$T_{\mu\nu\rho\ldots\alpha} = \frac{\partial A_{\mu\nu\rho\ldots}}{\partial x_\alpha}. \tag{12}$$

Согласно этим правилам, можно из одних тензоров образовывать новые тензоры относительно линейных ортогональных преобразований.

Свойства симметрии тензоров. Тензоры называются симметричными или антисимметричными по отношению к паре их индексов μ и ν, если обе компоненты, которые получаются при перестановке μ и ν, соответственно равны друг другу или отличаются только знаком.

Условие симметрии: $A_{\mu\nu\rho} = A_{\nu\mu\rho}$.

Условие антисимметрии: $A_{\mu\nu\rho} = -A_{\nu\mu\rho}$.

Теорема. *Свойство симметрии или антисимметрии не зависит от выбора координат, и в этом его значение. Доказательство следует из равенства, определяющего тензор.*

Частные случаи тензоров.

I. Величины $\delta_{\rho\sigma}$, определяемые равенством (4), являются компонентами тензора (фундаментальный тензор).

Для доказательства заменим $A_{\alpha\beta}$ в правой части уравнения преобразования $A'_{\mu\nu} = b_{\mu\alpha}b_{\nu\beta}A_{\alpha\beta}$ на величины $\delta_{\alpha\beta}$ (равные единице, если $\alpha = \beta$, или нулю, если $\alpha e \beta$) мы получим

$$A'_{\mu\nu} = b_{\mu\alpha}b_{\nu\beta} = \delta_{\mu\nu}.$$

Справедливость последнего равенства становится очевидной, если применить формулу (4) к обратной подстановке (5).

II. Существует тензор $(\delta_{\mu\nu\rho\ldots})$, антисимметричный по всем парам индексов, ранг которого равен числу измерений n, а компоненты равны $+1$ или -1

в зависимости от того, получается ли $\mu\nu\rho\ldots$ четной или нечетной подстановкой из 123...

Доказательство следует из установленной выше теоремы, согласно которой $|b_{\rho\sigma} = 1|$.

Эти несколько простых теорем составляют аппарат теории инвариантов, необходимый для построения уравнений дорелятивистской физики и специальной теории относительности.

Мы видели, что в дорелятивистской физике для установления пространственных соотношений требуются тело отсчета или пространство отсчета и вдобавок декартова система координат. Мы можем слить оба эти понятия воедино, представляя себе декартову систему координат как кубическую решетку, образованную из стержней единичной длины. Координаты узловых точек решетки — целые числа. Из основного соотношения

$$s^2 = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 \tag{13}$$

следует, что длины всех стержней, составляющих эту пространственную решетку, равны единице. Чтобы установить временные соотношения, нужны, кроме того, стандартные часы, расположенные в начале нашей декартовой системы отсчета (решетки). Где бы ни произошло событие, мы можем сопоставить с ним три координаты x_ν и время t, как только мы установили, какое показание часов, находящихся в начале координат, было одновременно с событием. Мы придаем тем самым объективное значение утверждению об одновременности удаленных событий, тогда как прежде мы касались лишь одновременности двух ощущений индивидуума. Определенное таким образом время, во всяком случае, не зависит от положения системы координат в нашем пространстве отсчета и поэтому инвариантно относительно преобразований (3).

В дорелятивистской физике постулируется, что система уравнений, выражающая ее законы, ковариантна по отношению к преобразованиям (3) так же, как и соотношения евклидовой геометрии.

Этим путем выражается изотропность и однородность пространства[6]. Рассмотрим с этой точки зрения некоторые из наиболее важных уравнений физики.

Уравнения движения материальной точки имеют вид

$$m\frac{d^2x_\nu}{dt^2} = X_\nu, \tag{14}$$

где (dx_ν) — вектор; dt, а следовательно, и $\frac{1}{dt}$ — инвариант, так что $\frac{dx_\nu}{dt}$ — вектор; таким же путем можно показать, что $\frac{d^2x_\nu}{dt^2}$ — вектор. Вообще дифференцирование по времени не меняет тензорных свойств. Поскольку m — инвариант (тензор ранга 0), то $m\frac{d^2x_\nu}{dt^2}$ — вектор, или тензор ранга 1 (по теореме умножения тензоров). Если сила (X_ν) обладает свойствами вектора, то этим же свойством обладает разность $\left(m\frac{d^2x_\nu}{dt^2} - X_\nu\right)$. Уравнения движения пригодны поэтому в любой другой декартовой системе координат в пространстве отсчета. Векторный характер (X_ν) легко обнаружить в случае консервативных сил. Тогда существует потенциальная энергия Φ, зависящая только от взаимных расстояний частиц и потому инвариантная. Векторный харак-

[6]Даже если бы в пространстве существовало выделенное направление, законы физики можно было бы сформулировать ковариантно по отношению к преобразованиям (3); но в этом случае такая формулировка была бы неудобной. При наличии выделенного направления в пространстве описание явлений природы можно было бы упростить, ориентируя определенным способом систему координат в этом направлении. Вместе с тем, если выделенного направления в пространстве нет, нелогично формулировать законы природы, замалчивая эквивалентность различным образом ориентированных систем координат. Мы снова столкнемся с этой точкой зрения в специальной и общей теориях относительности.

тер силы $X_\nu = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_\nu}$ здесь следует из нашей общей теоремы о производной от тензора ранга 0.

Умножая на скорость (тензор ранга 1), мы получаем тензорное уравнение

$$\left(m\frac{d^2x_\nu}{dt^2} - X_\nu\right)\frac{dx_\mu}{dt} = 0.$$

После свертки и умножения на скаляр dt мы получим соотношение для кинетической энергии

$$d\left(\frac{mq^2}{2}\right) = X_\nu\, dx_\nu.$$

Если через ξ_ν обозначены разности координат материальной частицы и фиксированной точки пространства, то ξ_ν обладает свойствами вектора. В силу очевидного соотношения $\dfrac{d^2x_\nu}{dt^2} = \dfrac{d^2\xi_\nu}{dt^2}$, уравнения движения частицы могут быть записаны в виде

$$m\frac{d^2\xi_\nu}{dt^2} - X_\nu = 0.$$

Умножая это уравнение на ξ_μ, мы получаем тензорное уравнение

$$\left(m\frac{d^2\xi_\nu}{dt^2} - X_\nu\right)\xi_\mu = 0.$$

Свертывая этот тензор и усредняя по времени, получаем теорему вириала, на которой, однако, мы не будем останавливаться. Путем замены индексов и последующего вычитания мы приходим после простого преобразования к теореме моментов

$$\frac{d}{dt}\left[m\left(\xi_\mu\frac{d\xi_\nu}{dt} - \xi_\nu\frac{d\xi_\mu}{dt}\right)\right] = \xi_\mu X_\nu - \xi_\nu X_\mu. \tag{15}$$

Отсюда очевидно, что момент вектора является не вектором, а тензором. В систему уравнений (15), в силу ее антисимметрии, входят не девять, а лишь три независимых уравнения. Возможность замены в трехмерном пространстве антисимметричного тензора второго ранга вектором связана с существованием вектора

$$A_\mu = \frac{1}{2} A_{\sigma\tau} \delta_{\sigma\tau\mu}.$$

Если мы умножим антисимметричный тензор второго ранга на введенный нами выше особый антисимметричный тензор δ и свернем его дважды, то получим вектор, компоненты которого численно равны компонентам тензора. Это так называемые аксиальные векторы, которые при переходе от правой системы координат к левой преобразуются иначе, чем Δx_ν. Рассмотрение антисимметричного тензора второго ранга как трехмерного вектора дает некоторое преимущество в наглядности, но сущность соответствующей величины при этом проявляется не так ясно, как при рассмотрении ее как тензора.

Рассмотрим теперь уравнения движения сплошной среды. Пусть ρ — плотность, u_ν — компоненты скорости, рассматриваемые как функции координат и времени, X_ν — объемные силы на единицу массы и $p_{\nu\sigma}$ — напряжения на поверхности, перпендикулярной к оси σ в направлении возрастания x_ν. Тогда уравнения движения, согласно закону Ньютона, имеют вид

$$\rho \frac{du_\nu}{dt} = -\frac{\partial p_{\nu\sigma}}{\partial x_\sigma} + \rho X_\nu,$$

где $\dfrac{\partial u_\nu}{\partial t}$ — ускорение частицы, находившейся в момент t в точке с координатами x_ν. Если мы запишем это ускорение с помощью частных производных, то после деления на ρ получим

$$\frac{\partial u_\nu}{\partial t} + \frac{\partial u_\nu}{\partial x_\sigma} u_\sigma = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_{\nu\sigma}}{\partial x_\sigma} + X_\nu.$$

Мы должны показать, что это уравнение выполняется независимо от конкретного выбора декартовой системы координат. Здесь u_ν — вектор, и поэтому $\dfrac{\partial u_\nu}{\partial t}$ тоже вектор; $\dfrac{\partial u_\nu}{\partial x_\sigma}$ — тензор второго ранга, а $\dfrac{\partial u_\nu}{\partial x_\sigma} u_\tau$ — тензор третьего ранга. Второй член слева получается сверткой последнего по индексам σ и τ. Векторный характер второго члена справа очевиден. Для того чтобы первый член справа также был вектором, необходимо, чтобы величина $p_{\nu\sigma}$ была тензором. Тогда при помощи дифференцирования и свертки получаем величину $\dfrac{\partial p_{\nu\sigma}}{\partial x_\sigma}$, которая, таким образом, является вектором и остается таковым после умножения на скаляр $1/\rho$. Тот факт, что $p_{\nu\sigma}$ — тензор и потому преобразуется согласно уравнению

$$p'_{\mu\nu} = b_{\mu\alpha} b_{\nu\beta} p_{\alpha\beta},$$

доказывается в механике интегрированием этого равенства по бесконечно малому тетраэдру. Там доказывается также путем применения теоремы моментов к бесконечно малому параллелепипеду, что $p_{\nu\sigma} = p_{\sigma\nu}$, т. е. что тензор напряжений является симметричным тензором. Из сказанного можно, следуя сформулированным выше правилам, найти, что это равенство ковариантно по отношению к ортогональным преобразованиям в пространстве (вращениям); правила, согласно которым должны преобразовываться величины в этом равенстве, чтобы оно было ковариантным, также становятся очевидными.

Ковариантность уравнения непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_\nu)}{\partial x_\nu} = 0 \tag{17}$$

после всего сказанного не требует особых пояснений.

Проверим также ковариантность уравнений, выражающих зависимость компонент напряжения от свойств вещества, и с помощью условия ковариантности выпишем эти уравнения для случая сжимаемой вязкой жидкости. Если пренебречь вязкостью, то давление p будет скаляром, зависящим только от плотности и температуры жидкости. Тензор напряжений тогда, очевидно, равен

$$p\delta_{\mu\nu},$$

где $\delta_{\mu\nu}$ — симметричный тензор специального вида. В случае вязкой жидкости этот член также будет присутствовать, но, кроме него, в выражении для давления будут еще члены, зависящие от пространственных производных скорости u_ν. Мы предположим, что зависимость эта линейна. Поскольку эти члены должны быть симметричными тензорами, в общее выражение может войти только комбинация

$$a\left(\frac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu} + \frac{\partial u_\nu}{\partial x_\mu}\right) + \beta\delta_{\mu\nu}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}$$

$\left(\text{так как } \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} \text{ — скаляр}\right)$. Из физических соображений (отсутствие скольжения) принимается, что в случае симметричного расширения по всем направлениям, т. е. когда

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \qquad \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \text{ и т. д.} = 0,$$

сил трения нет, откуда следует, что $\beta = -\frac{2}{3}a$.[7] Если отлична от нуля только производная $\frac{\partial u_1}{\partial x_2}$, то полагаем $p_{31} = -\eta\frac{\partial u_1}{\partial x_3}$, откуда определяется a. Таким образом, для полного тензора напряжений получается

[7]Это условие равенства нулю так называемого «второго коэффициента вязкости», выполняющееся лишь в специальных случаях (одноатоамный газ, слабо сжимаемая жидкость и т. п.). — *Прим. ред.*

формула

$$p_{\mu\nu} = p\delta_{\mu\nu} - \eta\left[\left(\frac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu} + \frac{\partial u_\nu}{\partial x_\mu}\right) - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)\delta_{\mu\nu}\right]. \tag{18}$$

Из этого примера становится ясным эвристическое значение теории инвариантов, основанной на изотропности пространства (эквивалентности всех направлений).

Рассмотрим, наконец, уравнения Максвелла в той форме, в которой они явились основой электронной теории Лоренца:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial h_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial h_2}{\partial x_3} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial e_1}{\partial t} + \dfrac{1}{c}j_1 \\ \dfrac{\partial h_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial h_3}{\partial x_1} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial e_2}{\partial t} + \dfrac{1}{c}j_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial e_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial e_2}{\partial x_2} + \dfrac{\partial e_3}{\partial x_3} = \rho \end{array}\right\}, \tag{19}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial e_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial e_2}{\partial x_3} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial h_1}{\partial t} \\ \dfrac{\partial e_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial e_3}{\partial x_1} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial h_2}{\partial t} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial h_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial h_2}{\partial x_2} + \dfrac{\partial h_3}{\partial x_3} = 0 \end{array}\right\}. \tag{20}$$

Здесь j — вектор, поскольку плотность тока определяется как плотность электричества, умноженная на вектор скорости электричества. Из первых трех уравнений очевидно, что e также следует рассматривать как вектор. Но тогда нельзя считать вектором $\mathbf{h}$.[8] Однако эти уравнения легко интерпретировать, если рассматривать $\mathbf{h}$ как антисимметричный тензор второго ранга. В этом смысле мы будем писать h_{23}, h_{31}, h_{12} вместо h_1, h_2, h_3. В силу антисимметричности $h_{\mu\nu}$ первые три уравнения (19) и (20) можно записать в виде

$$\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{1}{c}\frac{\partial e_\mu}{\partial t} + \frac{1}{c} j_\mu, \tag{19a}$$

$$\frac{\partial e_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial e_\nu}{\partial x_\mu} = -\frac{1}{c}\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial t}. \tag{20a}$$

Вектор $\mathbf{h}$, в отличие от $\mathbf{e}$, выступает как величина того же типа симметрии, что и угловая скорость. Уравнения с дивергенцией тогда принимают вид

$$\frac{\partial e_\nu}{\partial x_\nu} = \rho, \tag{19б}$$

$$\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x_\rho} + \frac{\partial h_{\nu\rho}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial h_{\rho\mu}}{\partial x_\nu} = 0. \tag{20б}$$

Последнее уравнение является антисимметричным тензорным равенством третьего ранга (антисимметрию выражения слева по отношению к любой паре индексов легко проверить, если учесть антисимметрию $h_{\mu\nu}$). Эти обозначения более естественны, чем обычные, поскольку, в отличие от последних, они справедливы как в правых, так и в левых декартовых системах без изменения знака.

[8] Эти рассуждения ознакомят читателя с тензорными операциями без специфических трудностей четырехмерной трактовки; соответствующие формулы в специальной теории относительности (интерпретация поля по Минковскому) встретят тогда меньшие затруднения.

Лекция 2

СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Предыдущие рассуждения, касающиеся взаимного расположения твердых тел, опирались, кроме предположения о применимости евклидовой геометрии, на гипотезу физической эквивалентности всех направлений в пространстве или всех ориентаций декартовых систем координат. Мы можем назвать это утверждение «принципом относительности по направлениям», и мы показали как при помощи тензорного исчисления могут быть найдены уравнения (законы природы), находящиеся в соответствии с этим принципом. Поставим теперь вопрос: существует ли относительность по отношению к состоянию движения пространства отсчета? Другими словами, существуют ли физически эквивалентные пространства отсчета, движущиеся друг относительно друга? С точки зрения механики, такие эквивалентные пространства отсчета должны существовать. Действительно, опыты па Земле не дают нам никаких указаний на то, что мы движемся вокруг Солнца со скоростью около 30 *км/сек*. С другой стороны, пространства отсчета, движущиеся произвольно, вовсе не представляются физически эквивалентными: механические явления подчиняются разным законам в трясущемся железнодорожном поезде и в поезде, движущемся равномерно, с постоянной скоростью; при написании уравнений движения относительно Земли следует учитывать ее вращение. Таким образом, дело обстоит так, как если бы существовали декартовы системы координат, так называемые инерциальные системы, в которых законы механики (и вообще законы физики) принимают наиболее простой вид. Мы можем сделать заключение о справедливости следующей теоремы: если K — инерциальная система, то любая другая система K', движущаяся равномерно и без вращения относительно K, также является инерциальной; во всех инерциальных системах координат законы природы имеют одну и ту же форму. Это положение мы назовем «специальным принципом относительности. Из этого принципа «относительности по отношению к перемещениям» мы выведем некоторые следствия так же, как это было сделано для относительности по направлениям.

Чтобы иметь возможность выполнить это, мы должны сначала решить следующую задачу. Пусть нам даны декартовы координаты x_ν и время t события в одной инерциальной системе координат K; как вычислить координаты x'_ν и время t' того же события в инерциальной системе K', которая движется равномерно относительно K? В дорелятивистской физике эту задачу решали, молчаливо принимая две гипотезы.

1. Время абсолютно; время t' события в системе K' то же, что и время в системе K. Если бы на расстоянии можно было сообщаться мгновенными сигналами и если бы было известно, что состояние движения часов не влияет на их показания, тогда это предположение было бы физически обоснованным. Ибо тогда по системам K и K' можно было бы распределить покоящиеся по отношению к ним одинаковые и одинаково выверенные часы; их показания не зависели бы от состояния движения, и время каждого события определялось бы по часам, находящимся в непосредственной близости от этого события.

2. Длина абсолютна; если покоящийся в системе K интервал имеет длину s, то он имеет ту же длину s в любой системе K', которая движется относительно K.

Если соответствующие оси систем K и K' параллельны, простое вычисление, опирающееся на эти два предположения, приводит к уравнениям преобразования:

$$\left.\begin{aligned} x'_\nu &= x_\nu - a_\nu - b_\nu t \\ t' &= t - b \end{aligned}\right\}. \tag{21}$$

Эти преобразования известны под названием «галилеевых». Дифференцируя дважды по времени, получаем

$$\frac{\partial^2 x'_\nu}{dt^2} = \frac{d^2 x_\nu}{dt^2}.$$

Далее мы получаем, что для двух одновременных событий

$$x_\nu^{\prime(1)} - x_\nu^{\prime(2)} = x_\nu^{(1)} - x_\nu^{(2)}.$$

Возведение в квадрат и сложение приводят к инвариантности расстояния между двумя точками. Отсюда легко вывести ковариантность уравнений движения Ньютона относительно преобразований Галилея (21). Таким образом, классическая механика согласуется со специальным принципом относительности, если принять две гипотезы относительно часов и масштабов.

Однако эта попытка обосновать с помощью галилеевых преобразований относительность по отношению к перемещениям терпит неудачу, когда дело касается электромагнитных явлений. Уравнения Максвелла–Лоренца не ковариантны по отношению к преобразованиям Галилея. В частности, из (21) мы видим, что световой луч, который в системе K имел скорость c, обладает другой, зависящей от его направления скоростью в системе K'. Пространство отсчета системы K выделяется поэтому своими физическими свойствами среди всех других пространств отсчета, которые движутся относительно него (неувлекаемый эфир). Но все опыты показывают, что поступательное движение Земли не влияет на электромагнитные и оптические явления по отношению к Земле как телу отсчета. Наиболее важными из этих опытов являются опыты Майкельсона и Морли, которые я предполагаю известными. Таким образом, справедливость специального принципа относительности вряд ли может вызвать сомнения.

С другой стороны, доказана применимость уравнений Максвелла–Лоренца при рассмотрении задач оптики в движущихся телах. Никакая другая теория не дает удовлетворительного объяснения аберрации, распространения света в движущихся средах (Физо) и явлений, наблюдаемых в двойных звездах (де Ситтер). По этой причине можно считать установленным, что свет, как это вытекает из уравнений Максвелла–Лоренца, распространяется в пустоте со скоростью c, по крайней мере, в определенной инерциальной системе координат K. В согласии со специальным принципом относительности мы должны считать, что этот принцип справедлив также и в любой другой инерциальной системе.

Прежде чем делать какие-либо выводы из этих двух принципов, мы должны пересмотреть физический смысл понятий «время» и «скорость». Из предыдущего следует, что координаты в инерциальной системе физически определяются путем измерений и построений, выполняемых при помощи твердых тел. Чтобы измерять время, мы вводим часы U, покоящиеся где-либо в системе K. Однако при помощи этих часов мы не можем определить время событий, расстояниями которых до часов нельзя пренебречь, ибо нет никаких «мгновенных сигналов», которые мы могли бы употребить, чтобы сравнить время события с показаниями часов. Чтобы завершить определение времени, можно воспользоваться принципом постоянства скорости света в пустоте. Предположим, что мы разместили в различных точках системы K одинаковые часы, покоящиеся относительно нее. Будем выверять их по следующей схеме. В тот момент, когда часы U_m показывают время t_m, от них посылается луч света, который распространяется в пустоте на расстояние r_{mn} до часов U_n. В тот момент, когда луч достигает часов U_n, их устанавливают так, чтобы они показывали время[1]

$$t_n = t_m + \frac{r_{mn}}{c}.$$

Принцип постоянства скорости света утверждает, что такой способ регулировки часов не приводит к противоречиям. Пользуясь часами, выверенными таким способом, можно приписать время любому событию поблизости от них. Существенно отметить, что при этом время определено только в инерциальной системе K, поскольку мы пользовались системой часов, покоящихся относительно K. Делавшееся в дорелятивистской физике предположение об абсолютном характере времени (т. е. о независимости времени от выбора инерциальной системы) никоим образом не следует из нашего определения.

Теорию относительности часто критиковали за то, что она неоправданно приписывает центральную теоретическую роль явлению распространения света, основывая понятие времени на его законах. Положение дел, однако, примерно таково. Чтобы придать понятию времени физический смысл, нужны какие-то процессы, которые дали бы возможность установить связь между различными точками пространства. Вопрос о том, какого рода процессы выбираются при таком определении времени, несуществен. Для теории выгодно, конечно, выбирать только те процессы, относительно которых мы знаем что-то определенное. Распространение света в пустоте благодаря исследованиям Максвелла и Лоренца подходит для этой цели в гораздо большей сте-

[1]Строго говоря, было бы более правильным сначала определить одновременность, например, так: два события, происшедшие в точках A и B системы K, одновременны при наблюдении из точки M, лежащей посредине интервала AB, их замечают в один и тот же момент. Время тогда определяется как совокупность показаний одинаковых часов, покоящихся относительно K, которые одновременно имеют одинаковые показания.

пени, чем любой другой процесс, который мог бы стать объектом рассмотрения.

Из всего изложенного выше следует, что пространственные и временные данные имеют не фиктивное, а физически реальное значение. В частности, это относится ко всем соотношениям, в которые входят координаты и время, например к соотношениям (21). Поэтому имеет смысл спросить, справедливы ли указанные уравнения и каковы истинные уравнения преобразований, при помощи которых мы переходим от одной инерциальной системы, K, к другой, K', движущейся относительно первой. Можно показать, что на основе принципа постоянства скорости света и специального принципа относительности эта задача решается однозначно.

Теперь представим себе пространство и время определенными физически по отношению к двум инерциальным системам K и K' указанным выше способом. Пусть, далее, луч света идет в пустоте от точки P_1 к другой точке P_2 в системе K. Если r — измеренное расстояние между двумя точками, то распространение света должно удовлетворять условию

$$r = c\Delta t.$$

Возводя это уравнение в квадрат и выражая r^2 через разности координат Δx_ν, мы можем записать

$$\sum (\Delta x_\nu)^2 - c^2 \Delta t^2 = 0. \tag{22}$$

Этим соотношением формулируется принцип постоянства скорости света в системе K. Оно должно выполняться, каким бы ни было движение источника, испускающего луч света.

То же самое распространение света можно рассмотреть и в системе K'. И в этом случае должен выполняться принцип постоянства скорости света. Следовательно, в системе K' мы получаем соотношение

$$\sum (\Delta x'_\nu)^2 - c^2 \Delta t^2 = 0. \tag{22a}$$

Соотношения (22) и (22a) должны переходить друг в друга при преобразовании координат и времени, описывающем переход от K к K' K'. Преобразования, удовлетворяющие этому условию, мы будем называть «преобразованиями Лоренца».

Прежде чем подробно рассматривать эти преобразования, мы сделаем несколько общих замечаний о пространстве и времени. В дорелятивистской физике пространство и время были раздельными понятиями. Время приписывалось событиям независимо от выбора пространства отсчета. Механика Ньютона обладала относительностью по отношению к пространству отсчета, так что, например, утверждение, что два неодновременных события произошли в одном и том же месте, не имело объективного (т.е. независимого от пространства отсчета) содержания. Но эта относительность не сказывалась на построении теории. О точках пространства и моментах времени говорили так, как будто они были абсолютной реальностью. Не замечалось, что истинным элементом пространственно-временной локализации является событие, определенное четырьмя числами x_1, x_2, x_3, t. Представление о чем-либо происходящем есть всегда представление о четырехмерном континууме, но понимание этого было затемнено абсолютным характером дорелятивистского времени. После отказа от абсолютности времени, и особенно одновременности, сразу проявилась четырехмерность пространственно-временнóго представления.

Физической реальностью обладает не точка пространства и не момент времени, когда что-либо произошло, а только само событие. Нет абсолютного (независимого от пространства отсчета) соотношения в пространстве и нет абсолютного соотношения во времени, но есть абсолютное (независимое от пространства отсчета) соотношение в пространстве и времени, как это будет видно из дальнейшего. Факт отсутствия разумного объективного способа разделить четырехмерный континуум на трехмерное пространство и одномерный временной континуум указывает, что законы природы примут наиболее удовлетворительный, с точки зрения логики, вид, будучи выражены как законы в четырехмерном пространственно-временно́м континууме. На этом основаны большие преимущества метода, которым теория относительности обязана Минковскому. С его точки зрения, мы должны рассматривать x_1, x_2, x_3, t как четыре координаты события в четырехмерном континууме. Наглядное представление соотношений в четырехмерном континууме удается нам гораздо меньше, чем в трехмерном евклидовом континууме; однако следует подчеркнуть, что даже понятия соотношения евклидовой трехмерной геометрии являются абстракциями нашего разума, совершенно не совпадающими с теми образами, которые складываются у нас благодаря зрению и осязанию. Неразделимость четырехмерного континуума событий вовсе не означает эквивалентности пространственных координат временно́й координате. Наоборот, мы должны помнить, что временна́я координата определена физически совершенно иначе, чем пространственные координаты. Кроме того, соотношения (22) и (22а), условие совместимости которых определяет преобразования Лоренца, свидетельствуют о различной роли пространственных и временной координат, так как член Δt^2 входит в уравнение со знаком, противоположным знаку пространственных членов Δx_1^2, Δx_2^2, Δx_3^2.

Прежде чем подвергнуть дальнейшему анализу условия, которые определяют преобразования Лоренца, мы введем вместо времени t световое время $l = ct$, чтобы в последующие формулы постоянная c не входила в явном виде. Тогда преобразования Лоренца определяются так, чтобы соотношение

$$\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 - \Delta l^2 = 0 \qquad (22б)$$

было ковариантным, т. е. так, чтобы оно выполнялось во всех инерциальных системах, если оно выполняется в той инерциальной системе, к которой мы относим два данных события (испускание и прием светового луча). Наконец, мы, следуя Минковскому, введем вместо вещественной временной координаты $l = ct$ мнимую

$$x_4 = il = ict \quad \left(\sqrt{-1} = i\right).$$

Тогда соотношение, которое определяет распространение света и которое должно быть ковариантным по отношению к лоренцевым преобразованиям, запишется в виде

$$\sum_{(4)} \Delta x_\nu^2 = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 + \Delta x_4^2 = 0. \qquad (22в)$$

Это условие выполняется всегда, если выполняется более общее условие инвариантности величины

$$s^2 = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 + \Delta x_4^2 \qquad (23)$$

по отношению к преобразованиям Лоренца. Последнее выполняется только при линейных преобразованиях, т. е. при преобразованиях вида

$$x'_\mu = a_\mu + b_{\mu\alpha} x_\alpha, \qquad (24)$$

где суммирование по α распространяется от $\alpha = 1$ до $\alpha = 4$. Из уравнений (23) и (24) сразу видно, что если отвлечься от числа измерений и условий вещественности, преобразования Лоренца, определенные таким образом, совпадают со сдвигами и вращениями в евклидовой геометрии. Мы можем заключить также, что коэффициенты $b_{\mu\alpha}$ должны удовлетворять условиям

$$b_{\mu\alpha} b_{\nu\alpha} = \delta_{\mu\nu} = b_{\alpha\mu} b_{\alpha\nu}. \qquad (25)$$

Из формулы (24) видно, что все числа a_μ и $b_{\mu\alpha}$ вещественны, за исключением a_4, b_{41}, b_{42}, b_{43}, b_{14}, b_{24}, b_{34}, являющихся чисто мнимыми.

Преобразование Лоренца частного вида

Простейшие преобразования типа (24), (25) получатся, если преобразуются только две координаты и если все a_μ, определяющие положение нового начала координат, равны нулю. Тогда для индексов 1 и 2, в силу трех независимых условий, которые дают нам соотношения (25), получаем

$$\left.\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \cos\varphi - x_2 \sin\varphi \\ x'_2 &= x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi \\ x'_3 &= x_3 \\ x'_4 &= x_4 \end{aligned}\right\}. \tag{26}$$

Это — простое вращение в пространстве (пространственной) системы координат вокруг оси x_3. Мы видим, что рассматривавшиеся ранее пространственные вращения (без преобразования времени) содержатся в преобразованиях Лоренца как частный случай. Аналогично для индексов 1 и 4 получаем

$$\left.\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \cos\psi - x_4 \sin\psi \\ x'_4 &= x_1 \sin\psi + x_4 \cos\psi \\ x'_2 &= x_2 \\ x'_3 &= x_3 \end{aligned}\right\}. \tag{26a}$$

Так как координата x_4 чисто мнимая, величину ψ нужно взять мнимой. Чтобы интерпретировать физически полученные уравнения, введем что мнимого угла ψ вещественное световое время l и скорость v системы K' по отношению к K. Мы получим прежде всего

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \cos\psi - il \sin\psi, \\ l' &= -ix_1 \sin\psi + l \cos\psi. \end{aligned}$$

Поскольку для начала координат системы K', т. е. для $x'_1 = 0$, мы должны получить $x_1 = vl$, из первого из этих уравнений следует

$$v = i \operatorname{tg}\psi, \tag{27}$$

а также

$$\left.\begin{aligned} \sin\psi &= -\frac{iv}{\sqrt{1-v^2}} \\ \cos\psi &= -\frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \end{aligned}\right\}, \tag{28}$$

так что мы получаем

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= \frac{x_1 - vl}{\sqrt{1-v^2}} \\ l' &= \frac{l - vx_1}{\sqrt{1-v^2}} \\ x_2' &= x_2 \\ x_3' &= x_3 \end{aligned}\right\}. \tag{29}$$

Эти уравнения формулируют известное частное преобразование Лоренца, которое в общей теории описывает вращение четырехмерной системы координат на мнимый угол. Если мы введем вместо светового времени l обычное время t, то в (29) мы должны будем заменить l на ct и v на v/c.

Мы должны теперь восполнить один пробел. Из принципа постоянства скорости света вытекает, что уравнение

$$\sum \Delta x_\nu^2 = 0$$

имеет смысл, не зависящий от выбора инерциальной системы, но отсюда еще вовсе не следует инвариантность величины $\sum \Delta x_\nu^2$, которая может при преобразовании приобретать численный множитель. Это связано с тем, что правую часть уравнения (29) можно умножить на коэффициент λ, не зависящий от v. Мы покажем сейчас, однако, что в силу принципа относительности этот коэффициент но может отличаться от единицы.

Пусть мы имеем твердый круговой цилиндр, движущийся в направлении своей оси. Если его радиус, измеренный в покое при помощи измерительного стержня единичной длины, равен R_0, то при движении его радиус R может отличаться от R_0, так как в теории относительности не делается предположения о независимости формы тел в пространстве отсчета от их движения относительно этого пространства отсчета. Однако все направления в пространстве должны быть эквивалентны друг другу. Поэтому радиус R может зависеть только от величины q скорости, но не от ее направления, и, следовательно, должен быть четной функцией от q. Если цилиндр покоится относительно системы K', то уравнением его боковой поверхности будет

$$x'^2 + y'^2 = R_0^2.$$

Если мы запишем последние два уравнения (29) в более общей форме

$$\begin{aligned} x_2' &= \lambda x_2, \\ x_3' &= \lambda x_3, \end{aligned}$$

то получим, что боковая поверхность цилиндра задается в системе K уравнением

$$x^2 + y^2 = \frac{R_0^2}{\lambda^2}.$$

Множитель λ характеризует, таким образом, поперечное сокращение и, согласно предыдущему, может быть только четной функцией от v.

Если мы введем третью систему координат K'', которая движется относительно K' со скоростью v в направлении убывающих x', то получим, применяя дважды уравнения преобразования (29)

$$\begin{aligned} x_1'' &= \lambda(v)\,\lambda(-v)\,x_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ l'' &= \lambda(v)\,\lambda(-v)\,l. \end{aligned}$$

Далее, поскольку $\lambda(v)$ должно совпадать с $\lambda(-v)$ и поскольку мы условились пользоваться во всех системах одним и тем же измерительным стержнем, преобразование от K'' к K должно быть тождественным преобразованием (случай $\lambda = -1$ не нуждается в рассмотрении). Для всех этих рассуждений существенно предположение о независимости свойств измерительных стержней от истории их предшествующего движения.

Движущиеся измерительные стержни и часы

В определенный момент времени в K', а именно при $l = 0$, положения точек с целочисленными координатами $x_1' = n$ даются в системе K равенством $x_1 = n\sqrt{1-v^2}$. Этот факт следует из первого уравнения (29) и выражает собой лоренцово сокращение. Часы, покоящиеся в начале координат системы K $(x_1 = 0)$, удары которых определяются равенством $l = n$, будут бить, согласно наблюдениям из системы K', в моменты времени

$$l' = \frac{n}{\sqrt{1-v^2}},$$

что следует из второго уравнения (29). Часы идут медленнее, чем такие же часы, покоящиеся в K'. Два этих следствия, которые выполняются (с соответствующими видоизменениями) во всех системах отсчета и не связаны с какими-либо дополнительными условиями, составляют физическое содержание преобразования Лоренца.

Теорема сложения скоростей

Если мы скомбинируем какие-либо два частные преобразования Лоренца с относительными скоростями v_1 и v_2, то скорость, соответствующая результирующему преобразованию Лоренца, заменяющему два исходных, равна, согласно (27),

$$v_{12} = i\,\mathrm{tg}(\psi_1 + \psi_2) = i\frac{\mathrm{tg}\,\psi_1 + \mathrm{tg}\,\psi_2}{1 - \mathrm{tg}\,\psi_1\,\mathrm{tg}\,\psi_2} = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2}. \quad (30)$$

Общие замечания о преобразованиях Лоренца и их теория инвариантов

Вся теория инвариантов специальной теории относительности связана с инвариантом s^2 (23). В четырехмерном пространственно-временном континууме он играет формально ту же роль, что и инвариант $\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2$ в евклидовой геометрии и в дорелятивистской физике. Последняя величина неинвариантна по отношению ко всем лоренцевым преобразованиям; роль такого инварианта переходит к величине s^2z, определяемой равенством (23). Мы можем измерить s^2 в любой инерциальной системе координат; при заданной единице измерения s^2 является строго определенной величиной, связанной с любой парой событий.

Кроме числа измерений, s^2 отличается от соответствующего инварианта евклидовой геометрии еще следующими особенностями. В евклидовой геометрии величина s^2 непременно положительна. Она обращается в нуль только тогда, когда две рассматриваемые точки совпадают. Напротив, из обращения в нуль величины

$$s^2 = \sum \Delta x_\nu^2 = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 - \Delta l^2$$

еще нельзя сделать заключения о совпадении двух пространственно-временных точек. Обращение в нуль величины s^2 является инвариантным условием того, что две пространственно-временные точки можно связать в пустоте световым сигналом. Если P — точка (событие) в четырехмерном пространстве (x_1, x_2, x_3, l), то все «точки», которые можно связать с P световым сигналом, лежат на конусе $s^2 = 0$ (рис. 1; измерение x_3 опущено). «Верхняя» половина конуса содержит «точки», в которые можно послать световой сигнал из P; «нижняя» же половина будет содержать «точки», из которых можно послать световые сигналы в P. Интервал s^2 между точкой P и точками P', лежащими внутри конической поверхности, отрицателен;

согласно Минковскому, интервал PP' (так же как и $P'P$) временноподобен. Такие интервалы являются элементами возможных траекторий движений со скоростями, меньшими скорости света[2]. В этом случае, выбрав подходящее состояние движения инерциальной системы, можно направить ось l по PP'. Если P' лежит вне светового конуса, интервал PP' пространственноподобен; в этом случае подходящим выбором инерциальной системы можно Δl обратить в нуль.

Введя мнимую временную координату $x_4 = il$, Минковский сделал теорию инвариантов для четырехмерного континуума физических явлений полностью подобной теории инвариантов для трехмерного континуума евклидова пространства. Исчисление четырехмерных тензоров специальной теории относительности отличается от тензорного исчисления в трехмерном пространстве только числом измерений и соотношениями вещественности.

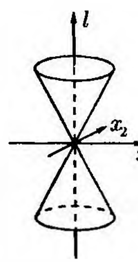


Рис. 1

Физическая величина, которая в произвольной инерциальной системе координат x_1, x_2, x_3, x_4 задается четырьмя числами A_ν, называется четырехмерным вектором (4-вектором) с компонентами A_ν, если A_ν своими соотношениями вещественности и законами преобразования соответствуют величинам Δx_ν; 4-вектор может быть временноподобным или пространственно подобным. Шестнадцать величин $A_{\mu\nu}$ составляют тензор второго ранга, если они преобразуются по закону

$$A'_{\mu\nu} = b_{\mu\alpha} b_{\nu\beta} A_{\alpha\beta}.$$

Отсюда ясно, что числа $A_{\mu\nu}$ ведут себя в смысле преобразований координат и соотношений ве-

[2]Скорости материальных тел, превышающие скорости света, невозможны, что вытекает из появления радикала $\sqrt{1-v^2}$ в формулах (29) частного преобразования Лоренца.

щественности как произведения компонент U_μ и V_ν двух 4-векторов (U) и (V). Все $A_{\mu\nu}$ вещественны, за исключением тех, которые содержат один раз индекс 4; последние чисто мнимы. Сходным образом можно определить тензоры третьего и четвертого рангов. Операции сложения, вычитания, умножения, свертывания и дифференцирования совершенно аналогичны соответствующим операциям над тензорами в трехмерном пространстве.

Прежде чем использовать тензорное исчисление в четырехмерном пространственно-временнóм континууме, рассмотрим более внимательно антисимметричные тензоры. У тензора второго ранга, вообще говоря, $16 = 4 \times 4$ компонент. В случае антисимметрии компоненты с двумя равными индексами обращаются в нуль, а с двумя неравными — попарно равны по величине и противоположны по знаку. Остается только шесть независимых компонент, как и в случае электромагнитного поля. Действительно, когда мы будем рассматривать уравнения Максвелла, мы покажем, что их можно считать тензорными уравнениями, если принять электромагнитное поле за антисимметричный тензор. Ясно, далее, что антисимметричный (по всем парам индексов) тензор третьего ранга имеет только четыре независимые компоненты, так как возможны только четыре сочетания из трех различных индексов.

Обратимся теперь к уравнениям Максвелла (19а), (19б), (20а), (20б) и введем следующие обозначения[3]:

$$\left.\begin{matrix} \varphi_{23} & \varphi_{31} & \varphi_{12} & \varphi_{14} & \varphi_{24} & \varphi_{34} \\ h_{23} & h_{31} & h_{12} & -ie_x & -ie_y & -ie_z \end{matrix}\right\}, \tag{31а}$$

$$\left.\begin{matrix} J_1 & J_2 & J_3 & J_4 \\ \frac{1}{c}j_x & \frac{1}{c}j_y & \frac{1}{c}j_z & i\rho \end{matrix}\right\}, \tag{31б}$$

[3]Во избежание путаницы мы будем пользоваться здесь и дальше вместо индексов 1, 2, 3 индексами x, y, z для трехмерного пространства, оставляя численные индексы 1, 2, 3, 4 для четырехмерного пространственно-временнóго континуума.

с условием, что $\varphi_{\mu\nu}$ должно равняться $-\varphi_{\nu\mu}$. Тогда уравнения Максвелла можно записать в виде

$$\frac{\partial \varphi_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = J_\mu, \tag{32}$$

$$\frac{\partial \varphi_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial \varphi_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial \varphi_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu} = 0, \tag{33}$$

что нетрудно проверить, используя (31а) и (31б). Уравнения носят тензорный характер и поэтому ковариантны по отношению к лоренцовым преобразованиям, если только $\varphi_{\mu\nu}$ и J_μ — тензоры, как мы и предполагаем. Тем самым однозначно определены законы преобразования этих величин от одной допустимой (инерциальной) системы координат к другой. Прогресс в методе, которым электродинамика обязана специальной теории относительности, заключается главным образом в уменьшении числа независимых гипотез. Если рассмотреть, например, уравнения (19а) только с точки зрения относительности по направлениям, как мы и делали выше, то мы увидим, что в него входят три логически несвязанных слагаемых. Электрическое поле входит в это уравнение так, что оно кажется совершенно независимым от того, как входит магнитное поле. Не было бы ничего удивительного, если бы вместо $\frac{\partial e_\mu}{\partial t}$ стояло, например, $\frac{\partial^2 e_\mu}{\partial t^2}$, или если бы этот член отсутствовал. В отличие от этого, в уравнение (32) входят только два независимых члена. Электромагнитное поле выступает формально как единое целое, и способ, которым электрическое поле входит в это уравнение, определяется тем, как входит в него магнитное поле. Кроме электромагнитного поля, только плотность электрического тока выступает как независимая величина. Причина этого успеха в методе заключается в том, что электрическое и магнитное поля приобретают раздельное существование лишь благодаря относительности движения. Поле, которое кажется в одной системе координат чисто электрическим, в другой инерциальной системе обладает и магнитными компонентами. В применении к электромагнитному полю, общий закон преобразований приводит в случае частного преобразования Лоренца к уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} e'_x &= e_x, & h'_x &= h_x, \\ e'_y &= \frac{e_y - vh_z}{\sqrt{1-v^2}}, & h'_y &= \frac{h_y + ve_z}{\sqrt{1-v^2}}, \\ e'_z &= \frac{e_z + vh_y}{\sqrt{1-v^2}}, & h'_z &= \frac{h_z - ve_y}{\sqrt{1-v^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Если относительно K существует только магнитное поле $\mathbf{h}$ и нет электрического поля $\mathbf{e}$, то относительно K' есть также и электрическое поле $\mathbf{e}'$, которое будет действовать на электрический заряд, покоящийся относительно K'. Наблюдатель, покоящийся относительно K, назовет эту силу силой Био–Савара или Лоренца. Дело обстоит так, как если бы эта сила оказалась объединенной в единое целое с напряженностью электрического поля.

Чтобы формально вывести это соотношение, рассмотрим выражение ими для силы, действующей на электрический заряд в единице объема,

$$\mathbf{k} = \rho\mathbf{e} + [\mathbf{j}, \mathbf{h}], \tag{35}$$

где $\mathbf{j}$ — вектор скорости электрического заряда; скорость света принята за единицу. Если мы введем обозначения J_μ и φ_μ, согласно (31а) и (31б), то получим для первой компоненты силы выражение

$$\varphi_{12}J_2 + \varphi_{13}J_3 + \varphi_{14}J_4.$$

Поскольку φ_{11} равно нулю в силу антисимметрии тензора (φ), компоненты $\mathbf{k}$ даются первыми тремя компонентами четырехмерного вектора

$$K_\mu = \varphi_{\mu\nu}J_\nu, \tag{36}$$

четвертая компонента которого равна

$$K_4 = \varphi_{41}J_1 + \varphi_{42}J_2 + \varphi_{43}J_3 = i(e_x j_x + e_y j_y + e_z j_z) = i\lambda. \tag{37}$$

Существует, следовательно, четырехмерный вектор силы, первые три компоненты которого k_1, k_2, k_3 являются составляющими пондеромоторной силы, действующей на единичный объем, а четвертая компонента есть работа, производимая полем в единичном объеме и в единицу времени, умноженная на $\sqrt{-1}$.

Сравнение выражений (35) и (36) показывает, что теория относительности формально объединяет пондеромоторную силу электрического поля ρe с силой Био – Савара или Лоренца $[\mathbf{j}, \mathbf{h}]$.

Масса и энергия

Из того факта, что существует осмысленный четырехмерный вектор K_μ, можно вывести одно важное заключение. Представим себе тело, находящееся в течение некоторого времени под воздействием электромагнитного поля. На символическом рисунке (рис. 2) Ox_1 означает ось x_1 и в то же время заменяет три пространственные оси Ox_1, Ox_2, Ox_3; Ol означает вещественную временну́ю ось. Тело конечного размера в определенный момент времени l изображается на этой диаграмме интервалом AB; все существование тела A в пространстве и времени представляется полосой, граница которой всюду наклонена к оси l под углом, меньшим 45°. Между двумя временными сечениями $l = l_1$ и $l_1 = l_2$, но не вплотную к ним, часть полосы заштрихована. Этим

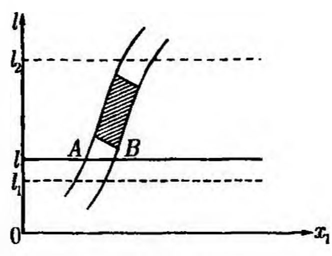


Рис. 2

отмечена та часть пространственно-временнóго многообразия, в которой электромагнитное поле воздействует на тело или на содержащиеся в нем электрические заряды, передающие это воздействие на самое тело. Рассмотрим изменения, которые претерпевают импульс и энергия тела в результате такого воздействия.

Мы будем предполагать, что для тела справедливы законы сохранения импульса и энергии. Изменения импульса ΔI_x, ΔI_y, ΔI_z и изменение энергии ΔE задаются тогда выражениями

$$\Delta I_x = \int\limits_{l_1}^{l_2} dl \int k_x\, dx\, dy\, dz = \frac{1}{i} \int K_1\, dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4,$$

. . . .

. . . .

$$\Delta E = \int\limits_{l_1}^{l_2} dl \int \lambda\, dx\, dy\, dz = \frac{1}{i} \int K_4\, dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4.$$

Поскольку элемент четырехмерного объема является инвариантом, а совокупность величин (K_1, K_2, K_3, K_4) образует 4-вектор, четырехмерный интеграл, распространенный на заштрихованную область, преобразуется как 4-вектор; то же справедливо и для интеграла в пределах от l_1 до l_2, поскольку незаштрихованная часть области интегрирования ничего не добавляет к интегралу. Отсюда следует, что ΔI_x, ΔI_y, ΔI_z, $i\Delta E$ образуют 4-вектор. Поскольку сами величины преобразуются так же, как и их приращения, совокупность четырех величин

$$I_x,\ I_y,\ I_z,\ iE$$

сама обладает свойствами вектора; эти величины относятся к мгновенному состоянию тела (например, ко времени $l = l_1$).

Этот 4-вектор можно выразить также через массу m и скорость тела, рассматриваемого как материальная точка. Чтобы образовать это выражение, заметим сначала, что величина

$$-ds^2 = d\tau^2 = -(dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2)-dx_4^2 = dl^2(1-q^2) \quad (38)$$

является инвариантом, который связан с бесконечно малым элементом четырехмерной линии, отвечающей движению материальной точки. Легко уяснить себе физический смысл инварианта $d\tau$. Если выбрать направление оси времени вдоль рассматриваемого линейного элемента, т.е. если привести материальную точку в состояние покоя, мы получим $d\tau = dl$. Эта величина будет, таким образом, измеряться проградуированными в световых секундах часами, которые покоятся относительно материальной точки и находятся в одном с ней месте. Поэтому мы называем τ собственным временем материальной точки. В отличие от dl, дифференциал $d\tau$ — инвариант; $d\tau$ практически совпадает с dl для движений со скоростями, много меньшими скорости света. Отсюда мы видим, что величина

$$u_\sigma = \frac{dx_\sigma}{d\tau}, \quad (39)$$

так же как и dx_ν, обладает векторными свойствами; мы будем называть (u_σ) четырехмерным вектором скорости. Согласно (38), его компоненты удовлетворяют условию

$$\sum u_\sigma^2 = -1. \quad (40)$$

Мы видим также, что этот 4-вектор, компоненты которого в обычных обозначениях равны

$$\frac{q_x}{\sqrt{1-q^2}}, \quad \frac{q_y}{\sqrt{1-q^2}}, \quad \frac{q_z}{\sqrt{1-q^2}}, \quad \frac{i}{\sqrt{1-q^2}}, \quad (41)$$

является единственным 4-вектором, который можно образовать из компонент скорости материальной точки, определенных в трехмерном виде равенствами

$$q_x = \frac{dx}{dl}, \quad q_y = \frac{dy}{dl}, \quad q_z = \frac{dz}{dl}.$$

Мы видим, таким образом, что

$$\left(m\frac{dx_\mu}{d\tau}\right) \tag{42}$$

и есть тот 4-вектор, который следует приравнять 4-вектору энергии и импульса, существование которого было доказано раньше. Приравнивая соответствующие компоненты, мы получаем в трехмерных обозначениях

$$\left.\begin{array}{l} I_x = \dfrac{mq_x}{\sqrt{1-q^2}}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ E = \dfrac{m}{\sqrt{1-q^2}}. \end{array}\right\} \tag{43}$$

Мы действительно убеждаемся, что эти компоненты импульса согласуются с величинами, получаемыми в классической механике при скоростях, малых по сравнению со скоростью света. При больших скоростях импульс возрастает со скоростью быстрее, чем линейно, обращаясь в бесконечность при приближении к скорости света.

Если последнее из равенств (43) применить к покоящейся материальной точке ($p = 0$), мы найдем, что энергия E тела в состоянии покоя равна его массе. Если бы мы выбрали в качестве единицы времени секунду, мы получили бы

$$E_0 = mc^2. \tag{44}$$

Таким образом, масса и энергия сходны по существу — это только различные выражения одного и того же. Масса тела не постоянна; она меняется вместе с его энергией[4]. Из последнего равенства (43) видно, что E стремится к бесконечности, когда q стремится к единице, т. е. к скорости света. Если мы разложим E по степеням q^2, то получим

$$E = m + \frac{m}{2}q^2 + \frac{3}{8}mq^4 + \ldots \tag{45}$$

Второй член разложения соответствует кинетической энергии материальной точки в классической механике.

Уравнения движения материальной точки

Дифференцируя равенства (43) по времени l, используя закон сохранения количества движения и переходя к трехмерным векторам, получаем

$$\mathbf{k} = \frac{d}{dl}\left(\frac{m\mathbf{q}}{\sqrt{1-q^2}}\right). \tag{46}$$

Справедливость этого уравнения, впервые написанного Г. А. Лоренцем для движения электронов, была доказана с большой степенью точности в опытах с β-лучами.

Тензор энергии электромагнитного поля

Еще до создания теории относительности было известно, что законы сохранения энергии и импульса для электромагнитного поля можно выразить

[4]Выделение энергии в радиоактивных процессах, очевидно, связано с тем фактом, что атомные веса не являются целыми числами. Эквивалентность между массой покоя и энергией покоя, выражаемая соотношением (44), неоднократно подтверждалась за последние годы. При радиоактивном распаде сумма получающихся масс всегда меньше, чем масса распадающегося ядра. Разность проявляется как в виде кинетической энергии порожденных частиц, так и в виде высвобожденной энергии излучения.

в дифференциальной форме. Четырехмерная формулировка этих законов приводит к важному понятию о тензоре энергии, которое существенно для дальнейшего развития теории относительности.

Если в формуле для четырехмерного вектора силы, действующей на единицу объема,

$$K_\mu = \varphi_{\mu\nu} J_\nu$$

выразить J_μ, используя уравнения поля (32), через напряженности поля $\varphi_{\mu\nu}$, то после некоторых преобразований и повторного применения уравнений поля (32) и (33) получится выражение

$$K_\mu = -\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}, \tag{47}$$

где введено обозначение[5]

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}\varphi^2_{\alpha\beta}\delta_{\mu\nu} + \varphi_{\mu\alpha}\varphi_{\nu\alpha}. \tag{48}$$

Физический смысл уравнения (47) становится очевидным, если вместо него написать:

$$\left.\begin{array}{l} k_x = -\dfrac{\partial p_{xx}}{\partial x} - \dfrac{\partial p_{xy}}{\partial y} - \dfrac{\partial p_{xz}}{\partial z} - \dfrac{\partial (ib_x)}{\partial (il)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ i\lambda = -\dfrac{\partial (is_x)}{\partial x} - \dfrac{\partial (is_y)}{\partial y} - \dfrac{\partial (is_z)}{\partial z} - \dfrac{\partial (-\eta)}{\partial (il)}, \end{array}\right\} \tag{47а}$$

или, по исключении мнимой единицы,

$$\left.\begin{array}{l} k_x = -\dfrac{\partial p_{xx}}{\partial x} - \dfrac{\partial p_{xy}}{\partial y} - \dfrac{\partial p_{xz}}{\partial z} - \dfrac{\partial b_x}{\partial l}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda = -\dfrac{\partial s_x}{\partial x} - \dfrac{\partial s_y}{\partial y} - \dfrac{\partial s_z}{\partial z} - \dfrac{\partial \eta}{\partial l}, \end{array}\right\} \tag{47б}$$

[5]По α и β следует просуммировать.

Из последней записи мы видим, что первые три уравнения выражают закон сохранения импульса, $p_{xx}, \ldots, p_{zz}$ — максвелловы натяжения электромагнитного поля, а (b_x, b_y, b_z) — вектор количества движения единицы объема поля. Последнее из уравнений (47а) выражает закон сохранения энергии; s — вектор потока энергии, а η — энергия единицы объема поля. Действительно, вводя известные из электродинамики выражения для компонент напряженности поля, мы получаем из (48)

$$\left.\begin{aligned}
p_{xx} &= -h_x h_x + \frac{1}{2}(h_x^2 + h_y^2 + h_z^2) - \\
&\qquad - e_x e_x + \frac{1}{2}(e_x^2 + e_y^2 + e_z^2), \\
p_{xy} &= -h_x h_y - e_x e_y, \\
p_{xz} &= -h_x h_z - e_x e_z, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
b_x &= s_x = e_y h_z - e_z h_y \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\eta &= \frac{1}{2}(e_x^2 + e_y^2 + e_z^2 + h_x^2 + h_y^2 + h_z^2).
\end{aligned}\right\} \qquad (48a)$$

Из (48) мы можем заключить, что тензор энергии электромагнитного поля симметричен; это связано с тем фактом, что количество движения единицы объема равно потоку энергии (связь между энергией и инерцией).

Из этих рассуждений мы, таким образом, заключаем, что энергия единицы объема обладает свойствами тензора. Этот факт был доказан непосредственно только для электромагнитного поля, но мы можем утверждать, что он имеет всеобщую применимость. Уравнения Максвелла определяют электромагнитное поле, когда известно распределение электрических зарядов и токов. Однако законы, управляющие этими токами и зарядами, нам неизвестны. Мы знаем, конечно, что электричество состоит из элементарных частиц (электронов, положительно заряженных ядер), но мы не можем построить из этого теорию. Нам неизвестны энергетические факторы, определяющие распределение электричества в частицах с определенным размером и зарядом, и все попытки завершить теорию в этом направлении потерпели неудачу. Поэтому, если мы вообще можем основываться на уравнениях Максвелла, тензор энергии электромагнитного поля известен нам только вне заряженных частиц[6]. В этой области, вне заряженных частиц, единственной области, где мы можем быть уверены, что располагаем полным выражением для тензора энергии, мы, согласно (47), имеем

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0. \qquad (47\text{в})$$

Общие выражения для законов сохранения

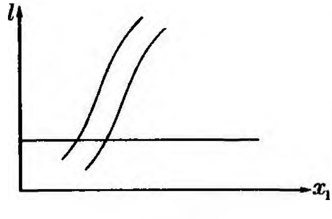


Рис. 3

Вряд ли можно обойтись без предположения, что и во всех других случаях пространственное распределение энергии задается симметричным тензором $T_{\mu\nu}$ и что этот тензор полной энергии всюду удовлетворяет соотношению (47б). Во всяком случае, мы увидим, что с помощью этого

[6]Этот пробел в наших знаниях пытались восполнить, рассматривая заряженные частицы как некоторые сингулярности. На мой взгляд, однако, это означает отказ от действительного выяснения строения вещества. Мне кажется, что гораздо лучше сознаться в нашей нынешней несостоятельности, чем удовлетворяться кажущимся решением.

предположения мы получаем правильное выражение для интегрального закона сохранения энергии.

Рассмотрим ограниченную в пространстве замкнутую систему, которую на четырехмерном языке можно представить полосой, вне которой $T_{\mu\nu}$ обращается в нуль (рис. 3). Проинтегрируем соотношение (47б) по пространственной области. Поскольку вследствие равенства $T_{\mu\nu}$ нулю на пределах интегрирования интегралы от $\frac{\partial T_{\mu 1}}{\partial x_1}$, $\frac{\partial T_{\mu 2}}{\partial x_2}$ и $\frac{\partial T_{\mu 3}}{\partial x_3}$ обращаются в нуль, мы получаем

$$\frac{\partial}{\partial l}\left\{\int T_{\mu 4}\, dx_1\, dx_2\, dx_3\right\} = 0. \tag{49}$$

Выражение в скобках содержит выражения для импульса всей системы, умноженного на i, и для энергии системы с обратным знаком, так что равенство (49) выражает законы сохранения в их интегральной форме. То, что это равенство ведет к правильному представлению об энергии и законах сохранения, станет очевидным из последующего рассмотрения.

Феноменологическое представление тензора энергии материи

Уравнения гидродинамики

Мы знаем, что вещество состоит из электрически заряженных частиц, но законы, управляющие строением этих частиц, нам неизвестны. При рассмотрении задач механики мы вынуждены поэтому пользоваться неточным описанием вещества, соответствующим классической механике. Такое описание опирается на фундаментальные понятия гидродинамического давления и плотности σ материальной субстанции.

Пусть σ_0 — плотность вещества в некоторой точке, определенная в системе координат, движущейся с веществом. Тогда σ_0 — плотность в системе покоя — является инвариантом. Если мы представим себе произвольно движущееся вещество и пренебрежем давлением (например, частицы пыли в пустоте, если пренебречь размерами частиц и температурой), то тензор энергии будет зависеть только от компонент скорости u_ν и σ_0. Тензорный характер величины $T_{\mu\nu}$ будет обеспечен, если положить

$$T_{\mu\nu} = \sigma_0 u_\mu u_\nu, \tag{50}$$

где u_μ в трехмерном представлении дается формулами (41). Действительно, из (50) следует, что при $q = 0$ мы имеем $T_{44} = -\sigma_0$ (т. е. T_{44} равно энергии единицы объема с обратным знаком), как и должно было быть, согласно теореме об эквивалентности массы и энергии и в соответствии с данной выше физической интерпретацией тензора энергии. Если на вещество действует внешняя сила (четырехмерный вектор K_μ), то по законам сохранения импульса и энергии должно выполняться уравнение

$$K_\mu = \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}.$$

Покажем, что это уравнение приводит к полученному выше закону движения материальной точки. Представим себе, что вещество сосредоточено в бесконечно малой области пространства, т. е. что мы имеем четырехмерную нить. Тогда, после интегрирования вдоль всей нити по пространственным координатам x_1, x_2, x_3, мы получим

$$\int K_1\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = \int \frac{\partial T_{14}}{\partial x_4}\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = \\ = -i\frac{d}{dl}\left\{\int \sigma_0 \frac{dx_1}{d\tau}\frac{dx_4}{d\tau}\, dx_1\, dx_2\, dx_3\right\}.$$

Далее, $\int dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4$ есть инвариант, так же, как и $\int \sigma_0\, dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4$. Вычислим этот интеграл сначала в выбранной нами инерциальной системе, а затем в системе, где скорость вещества равна нулю. Интегрирование следует распространить на волокно нити, для которого σ_0 можно считать постоянной по всему сечению. Если пространственные объемы волокна в двух системах координат равны соответственно dV и dV_0, мы имеем

$$\int \sigma_0\, dV\, dl = \int \sigma_0\, dV_0\, d\tau$$

и, следовательно,

$$\int \sigma_0\, dV = \int \sigma_0\, dV_0 \frac{d\tau}{dl} = \int dm\, i \frac{d\tau}{dx_4}.$$

Если мы используем это равенство для преобразования интервала, написанного выше, то, вынося $\frac{dx_1}{d\tau}$ за знак интегрирования, получаем

$$K_x = \frac{d}{dl}\left(m\frac{dx_1}{d\tau}\right) = \frac{d}{dl}\frac{mq_x}{\sqrt{1-q^2}}.$$

Мы убеждаемся, таким образом, что обобщенное понятие тензора энергии согласуется с нашим прежним результатом.

Эйлеровы уравнения для идеальной жидкости

Чтобы ближе подойти к описанию поведения реального вещества, мы должны добавить к тензору энергии член, соответствующий давлению. Простейшим случаем является случай идеальной жидкости, когда давление определяется некоторым скаляром p. Вклад в тензор энергии должен иметь вид $p\delta_{\mu\nu}$, поскольку тангенциальные напряжения p_{xy} и т.д. в этом случае обращаются в нуль. Мы должны, следовательно, положить

$$T_{\mu\nu} = \sigma u_\mu u_\nu + p\delta_{\mu\nu}. \tag{51}$$

В системе покоя плотность вещества, или энергия единицы объема, равна в этом случае не σ, а $\sigma - p$, так как

$$-T_{44} = -\sigma \frac{dx_4}{d\tau}\frac{dx_4}{d\tau} - p\,\delta_{44} = \sigma - p.$$

В отсутствие каких-либо сил мы имеем

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \sigma u_\nu \frac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu} + u_\mu \frac{\partial(\sigma u_\nu)}{\partial x_\nu} + \frac{\partial p}{\partial x_\mu} = 0.$$

Если мы умножим это уравнение на $u_\mu\left(= \frac{dx_\mu}{\tau}\right)$ и просуммируем по μ, то получим, использовав (40),

$$-\frac{\partial(\sigma u_\nu)}{\partial x_\nu} + \frac{dp}{d\tau} = 0, \qquad (52)$$

где мы положили

$$\frac{\partial p}{\partial x_\mu}\frac{dx_\mu}{d\tau} = \frac{dp}{d\tau}.$$

Это — уравнение непрерывности, которое отличается от классического членом $\frac{dp}{d\tau}$, который практически является исчезающе малым. В силу (52) закон сохранения принимает вид

$$\sigma \frac{du_\mu}{d\tau} + u_\mu \frac{dp}{d\tau} + \frac{\partial p}{\partial x_\mu} = 0. \qquad (53)$$

При первых трех значениях индексов эти уравнения соответствуют эйлеровым. То обстоятельство, что уравнения (52) и (53) в первом приближении соответствуют уравнениям гидродинамики в классической механике, служит дальнейшим подтверждением обобщенного закона сохранения энергии. Плотность вещества и энергии обладает свойствами симметричного тензора.

Лекция 3
ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Все, что рассказывалось выше, основывалось на предположении, что для описания физических явлений все инерциальные системы эквивалентны, но что при выражении законов природы они обладают преимуществами перед пространствами отсчета, находящимися в других состояниях движения. Из всего сказанного выше следует, что мы не можем искать причины, по которым некоторые состояния движения имеют преимущество перед всеми другими, в телах, с которыми мы имеем дело, или в самом понятии движения; напротив, это преимущество следует рассматривать как независимое свойство пространственно-временнóго континуума. В частности, закон инерции, по-видимому, вынуждает нас приписать пространственно-временнóму континууму объективные свойства. Точно так же, как с ньютоновской точки зрения, оказалось необходимым ввести постулаты *tempus est absolutum, spatium est absolutum*[1], так с точки зрения специальной теории относительности мы должны объявить *continuum spatii et temporis est absolutum*[2]. В этом последнем утверждении *absolutum* означает не только «физически реальный», но также «независимый по своим физическим свойствам, оказывающий физи-

[1]Время абсолютно, пространство абсолютно (лат.). — *Прим. ред.*

[2]Пространственно-временнóй континуум абсолютен (лат.). — *Прим. ред.*

ческое действие, но сам от физических условий не зависящий».

До тех пор, пока закон инерции рассматривается как краеугольный камень физики, такая точка зрения является единственно оправданной. Однако такая обычная концепция встречает два серьезных возражения. Во-первых, представление о чем-то (пространственно-временно́й континуум), что воздействует само, но на что нельзя воздействовать, противоречит присущему науке методу мышления. Именно это побудило Э. Маха сделать попытку исключить пространство как активную причину из системы механики. Согласно Маху, материальная точка при неускоренном движении движется не относительно пространства, а относительно центра всех прочих масс во Вселенной; таким путем, в противовес механике Ньютона и Галилея, замыкается причинная цепь механических явлений. Чтобы развить эту идею в рамках современной теории действия через среду, свойства пространственно-временно́го континуума, определяющие инерцию, должны рассматриваться как полевые свойства пространства, аналогично электромагнитному полю. Понятия классической механики не дают нам возможности выразить это, и по указанной причине попытка Маха потерпела в то время неудачу. Позже мы вернемся к этой точке зрения.

Во-вторых, классическая механика указывает на одно ограничение, которое непосредственно требует распространения принципа относительности и на такие пространства отсчета, которые не находятся в состоянии равномерного движения друг относительно друга. Отношение масс двух тел определяется в механике двумя принципиально различными способами: с одной стороны, через обратное отношение ускорений, которые сообщает им одна и та же ускоряющая сила (инертная масса), и, с другой стороны, через отношение сил, действующих на них в одном и том же гравитационном поле (гравитационная масса). Равенство этих двух масс, столь различно определяемых, является фактом, подтвержденным опытами с весьма большой точностью (опыты Этвеша), но классическая механика не дает никакого объяснения этому равенству. Однако ясно, что утверждение о численном равенстве двух величин становится вполне научно обоснованным лишь после того, как доказано совпадение истинной природы обоих понятий.

То, что этой цели действительно можно достичь путем расширения принципа относительности, вытекает из следующих соображений. Простое рассуждение показывает, что теорема о равенстве инертной и гравитационной масс эквивалентна теореме о независимости ускорения, сообщаемого телу гравитационным полем, от природы тела. Действительно, выписанное полностью уравнение Ньютона для движения в гравитационном поле имеет вид

(Инертная масса) × (ускорение) =
= (напряженность гравитационного поля) ×
× (гравитационная масса).

Только в случае численного равенства между инертной и гравитационной массами ускорение не зависит от природы тела. Пусть теперь K — некоторая инерциальная система. Массы, достаточно удаленные друг от друга и от остальных тел, будут тогда относительно K свободны от ускорения. Рассмотрим теперь те же массы в системе координат K', движущейся равномерно ускоренно относительно K. По отношению к K' все эти массы обладают равными по величине и параллельными по направлению ускорениями; они ведут себя по отношению к K' так, как если бы существовало гравитационное поле, а система K' была неускоренной. Если оставить пока в стороне вопрос о «причине» такого гравитационного поля, которым мы займемся дальше, ничто не мешает нам считать гравитационное поле реально существующим; таким образом, представление о том, что система K' находится «в состоянии покoя», но имеется гравитационное поле, мы можем считать эквивалентным представлению о том, что только система K является «дозволенной» системой координат и никакого гравитационного поля нет. Предположение о полной физической эквивалентности систем координат K и K' мы назовем «принципом эквивалентности». Этот принцип, очевидно, теснейшим образом связан с теоремой о равенстве инертной и гравитационной масс и знаменует распространение принципа относительности на системы координат, движущиеся неравномерно друг относительно друга. Действительно, такая концепция приводит нас к признанию единства природы инерции и тяготения; в зависимости от того, каким образом мы их рассматриваем, одни и те же массы могут представляться находящимися под действием только сил инерции (по отношению к K) или под совместным действием как сил инерции, так и тяготения (по отношению к K'). Возможность объяснить численное равенство между инерцией и тяготением на основе единства их природы доставляет общей теории относительности, по моему убеждению, столь большое превосходство над представлениями классической механики, что все трудности, с которыми она сталкивается в своем развитии, следует по сравнению с этим считать незначительными.

Что же оправдывает наш отказ от предпочтительности инерциальных систем перед всеми другими системами координат, от предпочтительности, которая казалась так надежно установленной опытами, основанными на принципе инерции? Уязвимым местом принципа инерции было то обстоятельство, что он содержал порочный круг: масса движется без ускорения, если она достаточно удалена от других тел; но мы знаем о ее достаточной удаленности от других тел только по ее движению без ускорения. Существуют ли вообще какие-либо инерциальные системы для весьма протяженных областей пространственно-временнóго континуума или, скажем, для всей Вселенной. Закон инерции мы можем считать установленным с большой степенью точности в пространстве нашей планетной системы, если только мы пренебрегаем возмущениями, обусловливаемыми Солнцем и планетами. Выражаясь более точно, существуют конечные области, где по отношению к выбранному должным образом пространству отсчета материальные точки движутся свободно, без ускорений, и где с замечательной точностью выполняются законы развитой выше специальной теории относительности. Такие области будем называть «галилеевыми областями». Мы начнем с рассмотрения такого рода областей, как частного случая, свойства которого нам известны.

Принцип эквивалентности требует, чтобы при рассмотрении галилеевых областей в равной степени могли использоваться и неинерциальные системы, т. е. системы координат, не свободные от вращений и ускорений по отношению к инерциальным системам. Если мы, кроме того, хотим полностью снять трудный вопрос об объективных причинах, по которым определенные системы координат оказываются предпочтительными, мы должны разрешить пользоваться произвольно движущимися системами координат. Но как только мы серьезно производим эту попытку, мы вступаем в конфликт с той физической интерпретацией пространства и времени, к которой нас привела специальная теория относительности. Пусть, например, система координат K', ось z' которой совпадает с осью z системы K, вращается вокруг последней оси с постоянной угловой скоростью. Согласуется ли взаимное расположение твердых тел, покоящихся в K', с законами евклидовой геометрии? Поскольку K' — неинерциальная система, мы, вообще говоря, не знаем непосредственно ни законов, определяющих расположение твердых тел в системе K', ни вообще законов природы в этой системе. Но эти законы нам известны в инерциальной системе K, так что мы можем определить их и в системе K'. Представим себе, что вокруг начала координат в плоскости (x', y') системы K' нарисованы окружность и ее диаметр. Представим себе далее, что в нашем распоряжении имеется большое число совершенно одинаковых жестких стержней. Допустим, что они уложены друг за другом по окружности и по диаметру этого круга и находятся в покое относительно K'. Если U — число стержней, уложенных по окружности, а D — число стержней, уложенных по диаметру, то при отсутствии вращения K' относительно K мы имели бы

$$\frac{U}{D} = \pi.$$

Но если K' вращается, мы получим другой результат. Предположим, что в некоторый момент времени t в системе K мы определили положение концов всех стержней. Все стержни, расположенные вдоль окружности, претерпевают лоренцово сокращение по отношению к K, но стержни на диаметре не испытывают этого сокращения (вдоль своих длин!)[3]. Следовательно,

$$\frac{U}{D} > \pi.$$

Таким образом, получается, что законы конфигурации твердых тел в K' не согласуются с теми законами конфигурации твердых тел, которые соответствуют евклидовой геометрии. Далее, если мы расположим два экземпляра одинаковых часов (вращающихся вместе с K'), одни — на окружности, а другие — в ее центре, то при наблюдении из системы K часы на окружности будут идти медленнее, чем часы в центре. То же самое должно происходить с точки зрения системы K', если только мы не ввели противоестественного определения времени по отношению к K', при котором законы в K' зависели бы явно от времени. Поэтому

[3] В этих рассуждениях предполагается, что поведение часов и стержней зависит только от скоростей, но не от ускорений, или, по крайней мере, что влияние ускорения не компенсирует влияния скорости.

пространство и время нельзя определить в K' так же, как они определялись в специальной теории относительности для инерциальных систем. Но, согласно принципу эквивалентности, K' также может рассматриваться как покоящаяся система, в которой есть гравитационное поле (поле центробежных сил и сил Кориолиса). Мы приходим, таким образом, к следующему результату: гравитационное поле оказывает воздействие и даже определяет метрические законы пространственно-временного континуума. Если выразить законы конфигурации абсолютно твердых тел на языке геометрии, то эта геометрия в присутствии гравитационного поля не будет евклидовой.

Рассмотренный нами пример аналогичен тому, с которым мы встречаемся при двумерном описании поверхностей. В последнем случае на поверхности (например, на поверхности эллипсоида) также невозможно ввести координаты, которые имели бы простой метрический смысл, тогда как на плоскости декартовы координаты x_1, x_2 непосредственно означают длины, измеренные единичным измерительным стержнем. Гаусс преодолел эту трудность в своей теории поверхностей, введя совершенно произвольные, если не считать условия непрерывности, криволинейные координаты; впоследствии эти координаты были связаны с метрическими свойствами поверхности. Аналогичным образом и мы в общей теории относительности введем произвольные координаты x_1, x_2, x_3, x_4, которыми однозначно пронумеруем пространственно-временные точки так, чтобы близким событиям отвечали близкие значения координат; в остальном выбор координат произволен. Мы останемся верными принципу относительности в его наиболее широком смысле, если придадим такую форму законам, что они окажутся применимыми в любой четырехмерной системе координат, т. е. если уравнения, выражающие эти законы, будут ковариантны по отношению к произвольным преобразованиям.

Наиболее важной точкой соприкосновения между гауссовой теорией поверхностей и общей теорией относительности являются метрические свойства, на которых в основном базируются понятия обеих теорий. В теории поверхностей Гаусс рассуждает следующим образом. Плоскую геометрию можно основать на понятии расстояния ds между двумя бесконечно близкими точками. Понятие такого расстояния имеет физический смысл, поскольку это расстояние можно непосредственно измерить при помощи жесткого измерительного стержня. При подходящем выборе декартовых координат это расстояние можно выразить формулой $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2$. На этой величине мы можем основать понятия прямой как геодезической линии ($\delta \int ds = 0$), интервала, окружности и угла — понятия, на которых построено здание евклидовой геометрии на плоскости. Можно построить геометрию и на другой поверхности с непрерывно изменяющейся кривизной, если заметить, что бесконечно малую часть этой поверхности можно рассматривать как плоскую, с точностью до бесконечно малых величин. Тогда на этой малой части поверхности существуют декартовы координаты X_1, X_2 и расстояние между двумя точками, измеренное измерительным стержнем, дается формулой

$$ds^2 = dX_1^1 + dX_2^2.$$

Если ввести на поверхности произвольные криволинейные координаты x_1, x_2, то dX_1, dX_2 можно будет выразить линейно через dx_1, dx_2. Тогда всюду на поверхности мы будем иметь

$$ds^2 = g_{11}\,dx_1^2 + 2g_{12}\,dx_1\,dx_2 + g_{22}\,dx_2^2,$$

где g_{11}, g_{12}, g_{22} определяются характером поверхности и выбором координат. Если известны эти величины, то известно также, как можно уложить на поверхности сетку жестких стержней. Другими словами, геометрию поверхностей можно построить на этом выражении для ds^2 точно так же, как строится на соответствующем выражении плоская геометрия.

В физическом четырехмерном пространственно-временно́м континууме существуют аналогичные соотношения. В непосредственной близости от свободно падающего в гравитационном поле наблюдателя гравитационного поля нет. Поэтому мы всегда можем рассматривать бесконечно малые области пространства как галилеевы. Тогда в такой бесконечно малой области будет существовать инерциальная система (с пространственными координатами X_1, X_2, X_3 и временно́й координатой X_4), в которой мы должны считать применимыми законы специальной теории относительности. Величина, непосредственно измеримая нашими единичными измерительными стержнями и часами,

$$dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2 - dX_4^2,$$

или, с обратным знаком,

$$ds^2 = -dX_1^2 - dX_2^2 - dX_3^2 + dX_4^2, \tag{54}$$

является поэтому однозначно определенным инвариантом для двух соседних событий (точек в четырехмерном континууме), если мы только используем измерительные стержни, которые, будучи поднесены друг к другу и наложены, оказываются равными, и часы, показания которых одинаковы, когда они поднесены друг к другу. Здесь существенное значение имеет физическое предположение, что относительные длины двух измерительных стержней и относительные показания двух пар часов в принципе не зависят от их предшествующей истории. Но это предположение, конечно, подтверждается опытом; если бы оно не выполнялось, то не существовало бы резких спектральных линий, так как отдельные атомы одного и того же элемента, конечно, имеют различную историю, и было бы абсурдно допускать, что существует какое-либо относительное различие в строении отдельных атомов, обусловленное их предшествующей историей, поскольку массы и частоты отдельных атомов одного и того же элемента всегда одинаковы.

Пространственно-временные области конечной протяженности, вообще говоря, не будут галилеевыми, так что в конечной области никаким выбором координат нельзя исключить гравитационное поле. Поэтому нет таких координат, в которых метрические соотношения специальной теории относительности выполнялись бы в конечной области. Но для двух соседних точек (событий) континуума всегда существует инвариант ds. Его можно выразить в произвольных координатах. Если заметить, что местные dX_ν всегда можно выразить линейно через дифференциалы координат dx_ν, то ds^2 можно представить в виде

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu. \tag{55}$$

Функции $g_{\mu\nu}$ описывают в произвольно выбранной системе координат как метрические соотношения в пространственно-временно́м континууме, так и гравитационное поле. Так же как и в специальной теории относительности, мы должны различать между временноподобными и пространственноподобными линейными элементами в четырехмерном континууме; благодаря произведенному изменению знака пространственноподобным линейным элементам отвечает мнимый, а временноподобным — вещественный интервал ds. Временноподобный интервал можно непосредственно измерить выбранными подходящим образом часами.

Из того, что сказано выше, ясно, что для формулировки общей теории относительности необходимо обобщение теории инвариантов и теории тензоров; возникает вопрос о форме уравнений, ковариантных по отношению к произвольному точечному преобразованию. Обобщенное тензорное исчисление было развито математиками задолго до теории относительности. Риман первый распространил цепь рассуждений Гаусса на континуумы произвольного числа измерений; он пророчески предвидел физическое значение этого обобщения евклидовой геометрии. Затем последовало развитие теории в виде тензорного исчисления, особенно благодаря трудам Риччи и Леви-Чивиты. Здесь уместно кратко остановиться на наиболее важных математических понятиях и операциях тензорного исчисления.

Четыре величины, определенные как функции от x_ν в каждой системе координат, мы обозначим как компоненты A^ν контравариантного вектора, если они преобразуются при замене координат как дифференциалы координат dx_ν. Мы имеем, следовательно,

$$A^{\mu'} = \frac{\partial x'_\nu}{\partial x'_\mu} A^\nu. \tag{56}$$

Кроме этих контравариантных векторов, существуют также ковариантные векторы. Эти векторы преобразуются согласно правилу

$$B'_\mu = \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu} B_\nu, \tag{57}$$

где B_ν — компоненты ковариантного вектора. Определение ковариантного вектора выбрано так, чтобы произведение ковариантного и контравариантного векторов представляло собой скаляр по схеме

$$\varphi = B_\nu A^\nu \quad \text{(суммирование по } \nu).$$

Действительно

$$B'_\mu A^{\mu'} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\beta} B_\alpha A^\beta = B_\alpha A^\alpha.$$

В частности, производные $\frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}$ скаляра φ являются компонентами ковариантного вектора, которые вместе с дифференциалами координат образуют скаляр $\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha}\,dx_\alpha$; мы видим на этом примере, насколько естественно определение ковариантных векторов.

Существуют также тензоры любого ранга, которые могут обладать контравариантными или ковариантными свойствами по каждому индексу; как и в случае векторов, эти свойства указываются положением индекса. A_μ^ν, например, означает тензор второго ранга, ковариантный по индексу μ и контравариантный по индексу ν. Тензорные свойства этих величин указывают на то, что уравнениями преобразования будут

$$A_\mu^{\nu'} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\beta}A_\alpha^\beta. \tag{58}$$

Так же, как в теории линейных ортогональных преобразований, можно образовывать тензоры, складывая и вычитая тензоры равного ранга и одинакового характера, например

$$A_\mu^\nu + B_\mu^\nu = C_\mu^\nu. \tag{59}$$

Доказательство тензорного характера C_μ^ν опирается на преобразование (58).

Можно образовывать тензоры путем умножения, не нарушая характера индексов, точно так же, как в теории инвариантов линейных ортогональных преобразований, например

$$A_\mu^\nu B_{\sigma\tau} = C_{\mu\sigma\tau}^\nu. \tag{60}$$

Доказательство этого равенства непосредственно следует из правила преобразования.

Тензоры можно образовывать путем свертки по двум индексам разного характера, например,

$$A_{\mu\sigma\tau}^\mu = B_{\sigma\tau}. \tag{61}$$

Тензорные свойства $A_{\mu\sigma\tau}$ определяют тензорные свойства $B_{\sigma\tau}$. Доказательство:

$$A^{\mu'}_{\mu\sigma\tau}\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\beta}\frac{\partial x_s}{\partial x'_\sigma}\frac{\partial x_t}{\partial x'_\tau}\quad A^{\beta}_{\alpha st}=\frac{\partial x_s}{\partial x'_\sigma}\frac{\partial x_t}{\partial x'_\tau}A^{\alpha}_{\alpha st}.$$

Симметрия и антисимметрия тензора по отношению к паре индексов одинакового характера имеют тот же смысл, что и в специальной теории относительности.

Этим сказано все существенное об алгебраических свойствах тензоров.

Фундаментальный тензор. Из инвариантности ds^2 относительно произвольного выбора dx_ν и условия симметрии, совместимого с (55), следует, что $g_{\mu\nu}$, являются компонентами симметричного ковариантного тензора (фундаментальный тензор). Образуем из $g_{\mu\nu}$ определитель g, а также деленные на g миноры для каждого $g_{\mu\nu}$. Эти деленные на g миноры будут обозначаться через $g^{\mu\nu}$; их трансформационные свойства пока еще неизвестны. Мы имеем тогда

$$g_{\mu\alpha}g^{\mu\beta}=\delta^\beta_\alpha\equiv\begin{cases}1, & \text{если } \alpha=\beta,\\ 0, & \text{если } \alpha\neq\beta.\end{cases}\tag{62}$$

Если мы образуем бесконечно малые величины (ковариантные векторы)

$$d\xi_\mu=g_{\mu\alpha}\,dx_\alpha,\tag{63}$$

умножим их на $g^{\mu\beta}$ и просуммируем по μ, то получим, используя (62),

$$dx_\beta=g^{\beta\mu}\,d\xi_\mu.\tag{64}$$

Поскольку отношения $d\xi_\mu$ произвольны, а dx_β, так же как и dx_μ являются компонентами вектора, то, следовательно, $g^{\mu\nu}$ — компоненты контравариантного тензора[4] (контравариантный фундаментальный тензор). Тензорные свойства δ_α^β, (смешанный фундаментальный тензор) следуют соответственно из (62). При помощи фундаментального тензора мы можем вместо тензоров с ковариантным характером индексов вводить тензоры с контравариантным характером индексов и наоборот, например

$$A^\mu = g^{\mu\alpha} A_\alpha,$$

$$A_\mu = g_{\mu\alpha} A^\alpha,$$

$$T_\mu^\sigma = g^{\sigma\nu} T_{\mu\nu}.$$

Инвариантный объем. Элемент объема

$$\int dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4 = dx$$

не является инвариантом. В самом деле, по теореме Якоби

$$dx' = \left| \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu} \right| dx. \tag{65}$$

Но мы можем дополнить элемент объема dx так, чтобы он превратился в инвариант. Составляя определители от обеих частей равенства

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu} g_{\alpha\beta}$$

---

[4]Если мы умножим (64) на $\dfrac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\beta}$, просуммируем по β и заменим $d\xi_\mu$, путем перехода к штрихованным координатам, то получим

$$dx'_\alpha = \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\mu} \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\beta} g^{\mu\beta}\, d\xi'_\sigma.$$

Отсюда следует сделанное выше утверждение, поскольку, согласно (64), справедливо также и равенство $dx'_\alpha = g^{\sigma\alpha}\, d\xi'_\sigma$ и оба уравнения должны выполняться при любом выборе $d\xi'_\sigma$.

и дважды используя теорему об умножении определителей, получаем

$$g' = |g'_{\mu\nu}| = \left|\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu}\right|^2 \cdot |g_{\mu\nu}| = \left|\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu}\right|^{-2} g.$$

Таким образом, мы приходим к инварианту

$$\sqrt{g'}\, dx' = \sqrt{g}\, dx. \tag{66}$$

Образование тензоров путем дифференцирования. Хотя образование тензоров при помощи алгебраических операций оказалось столь же простым, как и в частном случае инвариантности по отношению к линейным ортогональным преобразованиям, тем не менее в общем случае инвариантные дифференциальные операции, к сожалению, значительно усложняются. Причина этого заключается в следующем. Если A^μ — контравариантный вектор, то его коэффициенты преобразования $\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu}$ не зависят от места только для линейных преобразований, так как в этом случае компоненты вектора в соседней точке $A^\mu + \frac{\partial A^\mu}{\partial x|al} dx_\alpha$ преобразуются точно так же, как A^μ, откуда следует векторный характер дифференциалов векторов и тензорный характер $\frac{\partial A'^\mu}{\partial x_\alpha}$. Но если коэффициенты $\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu}$ изменяются, это уже не так.

То, что, несмотря на это, и в общем случае существуют инвариантные дифференциальные операции, наиболее убедительно можно показать следующим путем, предложенным Леви-Чивитой и Вейлем. Пусть (A^μ) — контравариантный вектор с компонентами, заданными в системе координат x_ν. Пусть P_1 и P_2 — две бесконечно близкие точки континуума.

В бесконечно малой области, содержащей точку P_1, существует, согласно развитым нами представлениям, система координат X_ν (с мнимыми координатами X_4), в которой континуум становится евклидовым. Пусть $A^\mu_{(1)}$ — координаты вектора в точке P_1. Представим себе вектор с теми же координатами, построенный в точке P_2 в локальной системе координат X_ν (параллельный вектор в точке P_2); тогда этот параллельный вектор полностью определяется вектором в P_1 и смещением. Назовем эту операцию, однозначность которой станет ясной из дальнейшего, параллельным переносом вектора (A^μ) из точки P_1 в бесконечно близкую точку P_2. Если мы составим векторную разность вектора (A^μ) в точке P_2 и вектора, полученного параллельным переносом из P_1 в P_2, то получим вектор, который можно рассматривать как дифференциал вектора (A^μ) для данного переноса (dx_ν).

Этот векторный перенос можно, конечно, рассматривать и в системе координат x_ν. Если A^ν — координаты вектора в точке P_1 и $A^\nu + \delta A^\nu$ — координаты вектора, перенесенного в точку P_2 вдоль интервала (dx_ν), то в этом случае величины δA^ν не обращаются в нуль. Относительно этих величин, не обладающих векторными свойствами, нам известно, что они должны зависеть линейно и однородно от dx_ν и A^ν. Поэтому положим

$$\delta A^\nu = -\Gamma^\nu_{\alpha\beta} A^\alpha \, dx_\beta. \tag{67}$$

Кроме того, можно утверждать, что символ $\Gamma^\nu_{\alpha\beta}$ должен быть симметричен по индексам α и β, так как из представления в локальной евклидовой системе координат мы можем заключить, что при переносе некоторого элемента $d^{(1)}x_\nu$ вдоль другого элемента $d^{(2)}x_\nu$ описывается тот же параллелограмм, что и при переносе $d^{(2)}x_\nu$ вдоль $d^{(1)}x_\nu$. Следовательно, должно выполняться соотношение

$$d^{(2)}x_\nu + \left(d^{(1)}x_\nu - \Gamma^\nu_{\alpha\beta} d^{(1)}x_\alpha d^{(2)}x_\beta\right) =$$
$$= d^{(1)}x_\nu + \left(d^{(2)}x_\nu - \Gamma^\nu_{\alpha\beta} d^{(2)}x_\alpha d^{(1)}x_\beta\right).$$

Отсюда после перестановки в правой части равенства индексов суммирования α и β и следует сделанное выше утверждение.

Поскольку величины $g_{\mu\nu}$ определяют все метрические свойства континуума, они должны определять также $\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}$. Рассмотрим инвариант вектора A^{ν}, т. е. квадрат его модуля

$$g_{\mu\nu}A^{\mu}A^{\nu}.$$

Он является инвариантом и не может изменяться при параллельном переносе. Следовательно, мы имеем

$$0 = \delta(g_{\mu\nu}A^{\lambda}A^{\nu}) =$$
$$= \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}}A^{\mu}A^{\nu}\,dx_{\alpha} + g_{\mu\nu}A^{\mu}\delta A^{\nu} + g_{\mu\nu}A^{\nu}\delta A^{\mu},$$

или, согласно (67)

$$\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}} - g_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} - g_{\nu\beta}\Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\right)A^{\mu}A^{\nu}\,dx_{\alpha} = 0.$$

В силу симметрии стоящего в скобках выражения по индексам μ и ν, это уравнение только тогда может остаться справедливым при любом выборе векторов (A^{μ}) и dx_{ν}, когда выражение в скобках обращается в нуль при всех комбинациях индексов. Путем циклической перестановки индексов μ, ν, α получается всего три соотношения, из которых, принимая во внимание свойства симметрии $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$, мы получаем

$$\begin{bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{bmatrix} = g_{\alpha\beta}\Gamma^{\beta}_{\mu\nu}, \tag{68}$$

где, следуя Кристоффелю, введено сокращенное обозначение

$$\begin{bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x_{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}}\right). \tag{69}$$

Если мы умножим (68) на $g^{\sigma\alpha}$ и просуммируем по α, то получим

$$\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\alpha}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\right) = \left\{ {\mu\nu \atop \sigma} \right\}, \qquad (70)$$

где $\left\{ {\mu\nu \atop \sigma} \right\}$ — символ Кристоффеля второго рода. Таким образом, величины Γ выведены из $g_{\mu\nu}$. Соотношения (67) и (70) послужат нам основой для последующих рассуждений.

Ковариантное дифференцирование тензоров. Если $(A^\mu + \delta A^\mu)$ — вектор, получившийся после бесконечно малого параллельного переноса из P_1 в P_2, а $(A^\mu + \delta A^\mu)$ — вектор A^μ в точке P_2, то их разность

$$dA^\mu - \delta A^\mu = \left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x_\sigma} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\alpha} A^\alpha\right) dx_\sigma$$

также есть вектор. Поскольку выбор dx_σ произволен, величина

$$A^{\mu}_{;\sigma} = \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\sigma} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\alpha} A^\alpha \qquad (71)$$

является тензором, который мы назовем ковариантной производной от тензора первого ранга (вектора). Свертывая этот тензор, мы получаем дивергенцию контравариантного вектора A^μ. При этом мы должны учесть, что согласно (70)

$$\Gamma^{\sigma}_{\mu\sigma} = \frac{1}{2} g^{\sigma\alpha} \frac{\partial g_{\sigma\alpha}}{\partial x_\mu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x_\mu}. \qquad (72)$$

Если мы введем, далее, величину

$$A^\mu \sqrt{g} = \mathfrak{A}^\mu, \qquad (73)$$

названную Вейлем контравариантной тензорной плотностью[5] первого ранга, то отсюда следует, что

$$\mathfrak{A} = \frac{\partial \mathfrak{A}^{\mu}}{\partial x_{\mu}} \tag{74}$$

есть скалярная плотность.

Правило параллельного переноса ковариантного вектора B_{μ} мы получим, потребовав, чтобы при таком параллельном переносе скаляр

$$\varphi = A^{\mu} B_{\mu}$$

не менялся и, следовательно, величина

$$A^{\mu} \delta B_{\mu} + B_{\mu} \delta A^{\mu}$$

была бы равна нулю при любых значениях A^{μ}. Мы получим, таким образом,

$$\delta B_{\mu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\sigma} B_{\alpha}\, dx_{\sigma}. \tag{75}$$

Тем же путем, который привел нас к (71), мы приходим отсюда к ковариантной производной ковариантного вектора

$$B_{\mu;\sigma} = \frac{\partial B_{\mu}}{\partial x_{\sigma}} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\sigma} B_{\alpha}. \tag{76}$$

Меняя местами индексы μ и σ и вычитая, мы получаем антисимметричный тензор

$$\varphi_{\mu\sigma} = \frac{\partial B_{\mu}}{\partial x_{\sigma}} - \frac{\partial B_{\sigma}}{\partial x_{\mu}}. \tag{77}$$

Для ковариантного дифференцирования тензоров второго и высшего рангов можно использовать прием, которым выведено соотношение (75). Пусть, например, $(A_{\sigma\tau})$ — ковариантный тензор второго ранга. Тогда выражение $A_{\sigma\tau} E^{\sigma} F^{\tau}$ будет скаляром, если E и F — векторы. Оно не должно меняться при

[5]Это название оправдывается тем, что величина $A^{\mu} \sqrt{g}\, dx = \mathfrak{A}^{\mu}\, dx$ обладает тензорными свойствами. Каждый тензор, будучи умножен на $\sqrt{g}$, превращается в тензорную плотность. Для тензорных плотностей мы используем прописные буквы готического алфавита.

δ-переносе; выражая это математически, получаем, согласно (67), $\delta A_{\sigma\tau}$. Откуда находим нужную нам ковариантную производную

$$A_{\sigma\tau;\rho} = \frac{\partial A_{\sigma\tau}}{\partial x_\rho} - \Gamma^\alpha_{\sigma\rho} A_{\alpha\tau} - \Gamma^\alpha_{\tau\rho} A_{\sigma\alpha}. \tag{78}$$

Чтобы отчетливо выявить общее правило ковариантного дифференцирования тензоров, выпишем две выведенные сходным образом ковариантные производные

$$A^\tau_{\sigma;\rho} = \frac{\partial A^\tau_\sigma}{\partial x_\rho} - \Gamma^\alpha_{\sigma\rho} A^\tau_\alpha + \Gamma^\tau_{\alpha\rho} A^\alpha_\sigma, \tag{79}$$

$$A^{\sigma\tau}_{;\rho} = \frac{\partial A^{\sigma\tau}}{\partial x_\rho} + \Gamma^\sigma_{\alpha\rho} A^{\alpha\tau} + \Gamma^\tau_{\alpha\rho} A^{\sigma\alpha}. \tag{80}$$

Общее правило образования ковариантных производных становится теперь очевидным. Из этих формул можно получить и другие формулы, представляющие интерес для физических приложений теории.

Если $A_{\sigma\tau}$ — антисимметричный тензор, то путем циклических перестановок и сложения мы получаем антисимметричный по всем парам индексов тензор:

$$A_{\sigma\tau\rho} = \frac{\partial A_{\sigma\tau}}{\partial x_\rho} + \frac{\partial A_{\tau\rho}}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial A_{\rho\sigma}}{\partial x_\tau}. \tag{81}$$

Если в (78) мы заменим $A_{\sigma\tau}$ на фундаментальный тензор $g_{\sigma\tau}$, то правая часть тождественно обратится в нуль; аналогичное утверждение справедливо для формулы (80) по отношению к $g^{\sigma\tau}$. Таким образом, ковариантные производные фундаментального тензора равны нулю. В том, что это должно быть так, мы непосредственно убеждаемся, перейдя к локальной системе координат.

В случае антисимметричного тензора $A^{\sigma\tau}$ мы получаем из (80), свертывая по τ и ρ,

$$\mathfrak{A}^\sigma = \frac{\partial \mathfrak{A}^{\sigma\tau}}{\partial x_\tau}. \tag{82}$$

В общем случае, свертывая по индексам τ и ρ, мы получаем из (79) и (80) соотношения

$$\mathfrak{A}_\sigma = \frac{\partial \mathfrak{A}_\sigma^\alpha}{\partial x_\alpha} - \Gamma_{\sigma\beta}^\alpha \mathfrak{A}_\alpha^\beta, \tag{83}$$

$$\mathfrak{A}^\sigma = \frac{\partial \mathfrak{A}^{\sigma\alpha}}{\partial x_\alpha} + \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \mathfrak{A}^{\alpha\beta}. \tag{84}$$

Тензор Римана. Если мы имеем кривую, соединяющую точки континуума P и G, то вектор A^μ, заданный в точке P, можно перенести параллельно вдоль нашей кривой в точку G (рис. 4). В случае евклидова континуума (или в более общем случае, если при подходящем выборе координат $g_{\mu\nu}$ оказываются постоянными) вектор, полученный в точке G в результате этого переноса, не зависит от выбора кривой, соединяющей P и G. Однако в других случаях результат зависит от пути переноса. В этих случаях, следовательно, вектор изменяется (по направлению, но не по величине) на ΔA^μ, когда он из точки P, лежащей на замкнутой кривой, переносится вдоль этой кривой и возвращается обратно в P. Вычислим это изменение вектора

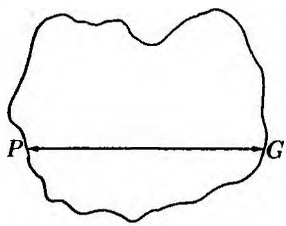


Рис. 4

$$\Delta A^\mu = \oint \delta A^\mu.$$

Эту задачу можно свести к интегрированию вдоль замкнутой кривой бесконечно малых линейных размеров так же, как это делается в теореме Стокса для контурных интегралов от вектора вдоль замкнутой кривой; этим случаем мы и ограничимся.

Прежде всего, согласно (67), имеем

$$\Delta A^\mu = -\oint \Gamma^\mu_{\alpha\beta} A^\alpha \, dx_\beta.$$

Здесь значение $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ берется в переменной точке G пути интегрирования. Если мы положим

$$\xi^\mu = (x_\mu)_G - (x_\mu)_P$$

и обозначим значение $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ в P через $\overline{\Gamma^\mu_{\alpha\beta}}$, то с достаточной степенью точности будем иметь

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \overline{\Gamma^\mu_{\alpha\beta}} + \frac{\partial \overline{\Gamma^\mu_{\alpha\beta}}}{\partial x_\nu} \xi^\nu.$$

Пусть, далее, A^α получается из $\overline{A^\alpha}$ при параллельном переносе вдоль кривой из P в G. Тогда при помощи соотношения (67) легко доказать, что $A^\mu - \overline{A^\mu}$ — бесконечно малая первого порядка, тогда как для кривой с бесконечно малыми размерами первого порядка ΔA^μ — бесконечно малая второго порядка. Поэтому с ошибкой лишь во втором порядке можно положить

$$A^\alpha = \overline{A^\alpha} - \overline{\Gamma^\alpha_{\sigma\tau} A^\sigma} \xi^\tau.$$

Если подставить эти значения $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ и A^α в интеграл, то, пренебрегая всеми величинами выше второго порядка малости, получаем

$$\Delta A^\mu = -\left(\frac{\partial \Gamma^\mu_{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma} - \Gamma^\mu_{\rho\beta} \Gamma^\rho_{\sigma\alpha}\right) A^\sigma \oint \xi^\alpha \, d\xi^\beta. \qquad (85)$$

Величины, вынесенные из-под знака интеграла, взяты в точке P. Вычитая $\frac{1}{2} d(\xi^\alpha \xi^\beta)$ из подынтегрального выражения, получаем

$$\frac{1}{2} \oint (\xi^\alpha \, d\xi^\beta - \xi^\beta \, d\xi^\alpha).$$

Этот антисимметричный тензор второго ранга $f_{\alpha\beta}$ характеризует величину и ориентацию элемента поверхности, ограниченного кривой. Если бы выражение в скобках в правой части равенства (85) было антисимметричным по индексам α и β, мы могли бы из (85) заключить о его тензорном характере. Это можно сделать, переставляя в (85) суммирование по α и β и прибавляя к (85) получившееся уравнение. Проделав это, мы получим

$$2\Delta A^{\mu} = -R^{\mu}_{\sigma\alpha\beta} A^{\sigma} f^{\alpha\beta}, \tag{86}$$

где[6]

$$R^{\mu}_{\sigma\alpha\beta} = -\frac{\partial \Gamma^{\mu}_{\sigma\alpha}}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial \Gamma^{\mu}_{\sigma\beta}}{\partial x_{\alpha}} + \Gamma^{\mu}_{\rho\alpha}\Gamma^{\rho}_{\sigma\beta} - \Gamma^{\mu}_{\rho\beta}\Gamma^{\rho}_{\sigma\alpha}. \tag{87}$$

Тензорный характер величины $R^{\mu}_{\sigma\alpha\beta}$ вытекает из (86); это — тензор кривизны Римана четвертого ранга. Нам нет необходимости рассматривать его свойства симметрии. Обращение его в нуль служит достаточным условием (не считая условия вещественности выбранных координат) того, что континуум евклидов.

Свертывая тензор Римана по индексам μ и β, получаем симметричный вектор второго ранга

$$R_{\mu\nu} = -\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} + \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}}{\partial x_{\nu}} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}. \tag{88}$$

Последние два члена обращаются в нуль, если система координат выбрана так, чтобы величина g была постоянной. Из $R_{\mu\nu}$ мы можем получить скаляр

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \tag{89}$$

Прямейшие (геодезические) линии. Можно построить линию таким образом, чтобы ее последова-

[6]Теперь в литературе определение этого тензора отличается знаком. — *Прим. ред.*

тельные элементы получились один из другого параллельными переносами. Это естественное обобщение прямой линии евклидовой геометрии. Для таких линий мы имеем

$$\delta\left(\frac{dx_\mu}{ds}\right) = -\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx_\alpha}{ds}\,dx_\beta.$$

Левую часть последнего равенства следует заменить на $\frac{d^2x_\mu}{ds^2}$,[7] так что

$$\frac{d^2x_\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\beta}{ds} = 0.$$

Ту же линию можно получить, если найти линию, вдоль которой интеграл, взятый между двумя точками,

$$\int ds, \quad \text{или} \quad \int \sqrt{g_{\mu\nu}\,dx_\mu\,dx_\nu}$$

принимает стационарное значение (геодезическая линия).

---

[7]Вектор направления в соседней точке кривой получается из вектора направления в рассматриваемой точке путем параллельного переноса его вдоль линейного элемента (dx_β).

Лекция 4
ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ (продолжение)

У нас теперь есть математический аппарат, необходимый для формулировки законов общей теории относительности. Мы не преследуем цель дать систематическое и полное изложение, но из того, что нам уже известно, и из полученных результатов мы будем последовательно выводить отдельные новые результаты и указывать на открывающиеся перспективы. Такой метод изложения наилучшим образом соответствует современному незавершенному характеру наших знаний.

Согласно закону инерции, материальная точка, на которую не действуют никакие силы, равномерно движется по прямой линии. В четырехмерном континууме специальной теории относительности (с вещественной временной координатой) это обычная прямая линия. Самым естественным, т. е. самым простым, обобщением прямой линии в системе понятий римановой общей теории инвариантов является «прямейшая», или геодезическая линия. Мы должны поэтому, в духе принципа эквивалентности, предположить, что движение материальной точки, находящейся под действием только сил инерции и тяготения, описывается уравнением

$$\frac{d^2x_\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\beta}{ds} = 0. \tag{90}$$

Действительно, это уравнение превращается в уравнение прямой, если все компоненты гравитационного поля $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ обращаются в нуль.

Как связаны эти уравнения с уравнениями движения Ньютона? Согласно специальной теории относительности, как $g_{\mu\nu}$, так и $g^{\mu\nu}$ имеют в инерциальной системе координат (при условии вещественности временной координаты и при соответствующем выборе знака ds^2) следующие значения:

$$\left.\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\} . \tag{91}$$

Тогда уравнения движения принимают вид

$$\frac{d^2x_\mu}{ds^2} = 0.$$

Мы будем называть это «первым приближением» для поля $g_{\mu\nu}$. При рассмотрении приближений часто бывает полезно, так же как и в специальной теории относительности, пользоваться мнимой координатой x_4, так как тогда компоненты $g_{\mu\nu}$ в первом приближении принимают значения

$$\left.\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{matrix}\right\} . \tag{91a}$$

Эти значения можно записать в форме

$$g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu}.$$

Тогда во втором приближении мы должны положить

$$g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}, \tag{92}$$

где $\gamma_{\mu\nu}$ должны рассматриваться как величины первого порядка малости.

Оба члена нашего уравнения движения будут тогда величинами первого порядка малости. Если мы пренебрегаем членами, которые по сравнению с этими являются малыми первого порядка, то мы должны положить

$$ds^2 = dx_\nu^2 = dl^2(1 - q^2), \tag{93}$$

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = -\delta_{\mu\sigma}\begin{bmatrix}\alpha\beta\\ \sigma\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}\alpha\beta\\ \mu\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\gamma_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial\gamma_{\alpha\mu}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial\gamma_{\beta\mu}}{\partial x_\alpha}\right). \tag{94}$$

Введем теперь приближение другого рода. Пусть скорость материальной точки очень мала по сравнению со скоростью света. Тогда ds совпадает с дифференциалом времени dl, а производные $\frac{dx_1}{ds}$, $\frac{dx_2}{ds}$, $\frac{dx_3}{ds}$ пренебрежимо малы по сравнению с $\frac{dx_4}{ds}$. Кроме того, мы будем предполагать, что гравитационное поле так слабо меняется с течением времени, что производными $\gamma_{\mu\nu}$ по x_4 можно пренебречь. В этом случае уравнения движения (для $\mu = 1, 2, 3$) принимают вид

$$\frac{d^2x_\mu}{l^2} = \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\gamma_{44}}{2}\right). \tag{90a}$$

Это уравнение совпадает с уравнением движения Ньютона для материальной точки в гравитационном поле, если мы отождествим $(\gamma_{44}/2)$ с потенциалом гравитационного поля. Допустимо ли такое отождествление или нет, зависит, очевидно, от уравнений гравитации, т. е. от того, удовлетворяет ли эта величина в первом приближении тому же самому уравнению поля, что и потенциал тяготения в теории Ньютона. Достаточно одного взгляда на уравнения (90) и (90a), чтобы убедиться, что $\Gamma^\mu_{\beta\alpha}$ действительно играют роль напряженности гравитационного поля. Эти величины на имеют тензорного характера.

Уравнения (90) выражают влияние инерции и тяготения на материальную точку. Единство инерции и тяготения формально выражается тем фактом, что левая часть уравнения (90) в целом имеет характер тензора (по отношению к любому преобразованию координат), но каждый из двух членов, взятый в отдельности, не имеет тензорного характера. По аналогии с уравнениями Ньютона первый член должен рассматриваться как выражение для силы инерции, а второй — как выражение для гравитационной силы.

Попытаемся теперь найти законы гравитационного поля. При этом нам в качестве модели послужит уравнение Пуассона в теории Ньютона

$$\Delta\varphi = 4\pi K \rho.$$

В основе этого уравнения лежит идея, что источником гравитационного поля является плотность вещества ρ. Так же должно быть и в общей теории относительности. Но специальная теория относительности показывает, что вместо скалярной плотности вещества мы должны оперировать с тензором энергии, отнесенным к единице объема. В последний включен не только тензор энергии вещества, но и электромагнитного поля. Однако на самом деле, как мы видели, описание вещества с помощью тензора энергии, с точки зрения более точной теории, следует рассматривать только как предварительное. В действительности вещество состоит из электрически заряженных частиц и должно само рассматриваться как часть, и притом главная часть, электромагнитного поля. И только тот факт, что мы недостаточно знаем законы электромагнитного поля сконцентрированных зарядов, вынуждает нас при изложении теории оставить истинную форму этого тензора пока неопределенной. С этой точки зрения наша задача теперь состоит во введении тензора второго ранга $T_{\mu\nu}$, структура которого нам пока известна лишь приблизительно и который включает в себя плотность энергии электромагнитного поля и вещества. В дальнейшем мы будем его называть «тензором энергии материи».

Согласно нашим прежним результатам, законы сохранения энергии и импульса сводятся к требованию, чтобы дивергенция этого тензора обращалась в нуль [см. (47в)]. Мы будем предполагать, что в общей теории относительности выполняется соответствующее общековариантное уравнение. Если через $T_{\mu\nu}$ обозначить ковариантный тензор энергии материи, а через $\mathfrak{T}_\sigma^\alpha$ — соответствующую смешанную тензорную плотность, то в соответствии с (83) мы должны потребовать, чтобы удовлетворялось уравнение

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\mathfrak{T}_\sigma^\alpha - \Gamma_{\sigma\beta}^\alpha \mathfrak{T}_\alpha^\beta. \tag{95}$$

Необходимо помнить, что, кроме плотности энергии материи, должна быть задана и плотность энергии гравитационного поля, так что не может быть и речи о законах сохранения энергии и импульса одной только материи. Математическим выражением этого факта является наличие второго члена в (95), который не допускает существования интегрального уравнения типа (49). Гравитационное поле передает «материи» энергию и импульс, подвергая ее действию сил и сообщая ей энергию; это выражается вторым членом в уравнении (95).

Если в общей теории относительности существует уравнение, аналогичное уравнению Пуассона, то оно должно быть тензорным уравнением для тензора гравитационного потенциала $g_{\mu\nu}$. Правая часть его должна содержать тензор энергии материи, а левая — тензор, составленный из производных от $g_{\mu\nu}$. Мы должны найти этот дифференциальный тензор. Он полностью определяется следующими тремя условиями: 1) он не может содержать производных от $g_{\mu\nu}$ выше второго порядка; 2) он должен быть линейным и однородным относительно вторых производных от $g_{\mu\nu}$; 3) его дивергенция должна тождественно обращаться в нуль.

Первые два из этих условий естественным образом вытекают из уравнения Пуассона. Поскольку может быть доказано математически, что все такие дифференциальные тензоры могут быть образованы алгебраическим путем (т. е. без дифференцирования) из тензора Римана, наш тензор должен иметь вид

$$R_{\mu\nu} + a\, g_{\mu\nu} R,$$

где $R_{\mu\nu}$ и R определяются соответственно соотношениями (88) и (89). Далее можно показать, что из третьего условия вытекает, что $a = -1/2$, и поэтому для уравнения гравитационного поля получаем

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\varkappa T_{\mu\nu}. \tag{96}$$

Уравнение (95) есть следствие этого уравнения. Здесь $\varkappa$ означает постоянную, связанную с гравитационной постоянной Ньютона.

В дальнейшем я укажу на те стороны теории, которые представляют интерес с точки зрения физики; при этом я постараюсь как можно меньше пользоваться довольно сложным математическим аппаратом теории. Прежде всего должно быть показано, что дивергенция левой части действительно равна нулю. Закон сохранения энергии для материи при помощи (83) может быть выражен уравнением

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \mathfrak{T}_\sigma^\alpha - \Gamma_{\sigma\beta}^\alpha \mathfrak{T}_\alpha^\beta, \tag{97}$$

где

$$\mathfrak{T}_\sigma^\alpha = T_{\sigma\tau} g^{\tau\alpha} \sqrt{-g}.$$

Произведя аналогичную операцию над левой частью уравнения (96), мы получим тождественно нуль.

В окрестности любой мировой точки существуют системы координат, относительно которых (при выборе мнимой координаты x_4) в этой точке

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu} = \begin{cases} -1, & \text{если } \mu = \nu, \\ 0, & \text{если } \mu \neq \nu \end{cases}$$

и первые производные от $g_{\mu\nu}$ и $g^{\mu\nu}$ обращаются в нуль. Покажем, что в этой точке дивергенция левой части обращается в нуль. В этой точке компоненты $\Gamma^{\alpha}_{\sigma\beta}$ равны нулю, так что мы должны доказать равенство нулю выражения

$$\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left[\sqrt{-g}\, g^{\nu\sigma}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R\right)\right].$$

Подставляя (88) и (70) в это выражение, мы видим, что в нем остаются только члены, содержащие третьи производные от $g^{\mu\nu}$. Так как $g_{\mu\nu}$ должно быть заменено на $-\delta_{\mu\nu}$, то в результате останется всего несколько членов, которые, как легко видеть, взаимно уничтожаются. Так как образованное нами выражение имеет тензорный характер, то обращение его в пуль доказано и для всех остальных систем координат, а также, естественно, и для любой другой мировой точки. Таким образом, закон сохранения энергии (97) оказывается математическим следствием уравнений поля (96).

Чтобы выяснить, согласуются ли уравнения (96) с опытом, мы должны прежде всего исследовать, приводят ли они в качестве первого приближения к теории Ньютона. Для этого мы должны сделать в этих уравнениях ряд приближений. Мы уже знаем, что евклидова геометрия и закон постоянства скорости света справедливы с хорошей точностью в таких больших областях, как наша солнечная система. Это значит, что если мы выберем, как в специальной теории относительности, четвертую координату мнимой, то мы должны положить

$$g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}, \tag{98}$$

где $\gamma_{\mu\nu}$ настолько малы по сравнению с единицей, что можно пренебречь как более высокими степенями $\gamma_{\mu\nu}$, так и их производными. Если мы это сделаем, мы не получим никаких сведений о структуре гравитационного поля или о метрическом пространстве космических размеров, но мы сможем изучить влияние соседних масс на физические явления.

Прежде чем вводить эти приближения, преобразуем уравнения (96). Умножим (96) на $g^{\mu\nu}$ и просуммируем по μ и ν. Учитывая соотношение

$$g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = 4,$$

вытекающее из определения $g^{\mu\nu}$, мы получаем уравнение

$$R = \varkappa g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = \varkappa T.$$

Подставляя это значение R в (96), получаем

$$R_{\mu\nu} = -\varkappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right) = -\varkappa T^*_{\mu\nu}. \qquad (96a)$$

Вводя приближения, о которых говорилось выше, получаем для левой части уравнения

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha^2} + \frac{\partial^2\gamma_{\alpha\alpha}}{\partial x_\mu\,\partial x_\nu} - \frac{\partial^2\gamma_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu\,\partial x_\alpha} - \frac{\partial^2\gamma_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu\,\partial x_\alpha}\right),$$

или

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial\gamma'_{\mu\alpha}}{\partial x_\alpha}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\gamma'_{\nu\alpha}}{\partial x_\alpha}\right).$$

где мы положили

$$\gamma'_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\gamma_{\sigma\sigma}\delta_{\mu\nu}. \qquad (99)$$

Вспомним теперь, что уравнения (96) справедливы в любой системе координат. Мы уже специализировали систему координат, выбрав ее таким образом, чтобы в изучаемой области $g_{\mu\nu}$ бесконечно мало отклонялись от постоянных значений $-\delta_{\mu\nu}$. Но это условие остается удовлетворенным при любом бесконечно малом преобразовании координат, так что мы можем наложить на $\gamma_{\mu\nu}$ еще четыре условия, если только они не меняют порядка величины $\gamma_{\mu\nu}$. Пусть система координат выбрана так, что удовлетворяются следующие четыре соотношения:

$$0 = \frac{\partial \gamma'_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} - \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{\sigma\sigma}}{\partial x_\mu}. \tag{100}$$

Тогда (96а) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha^2} = 2\varkappa T^*_{\mu\nu}. \tag{96б}$$

Эти уравнения могут быть решены обычным в электродинамике методом запаздывающих потенциалов; вводя не требующие разъяснений обозначения, мы получаем

$$\gamma_{\mu\nu} = -\frac{\varkappa}{2\pi}\int \frac{T^*_{\mu\nu}(x_0, y_0, z_0, t-r)}{r}\, dV_0. \tag{101}$$

Чтобы увидеть, в каком смысле эти уравнения содержат теорию Ньютона, мы должны более подробно рассмотреть тензор энергии материи. Феноменологически этот тензор представляет собой сумму тензоров энергии электромагнитного поля и вещества. Что касается относительной величины этих двух членов, то из результатов специальной теории относительности следует, что вклад электромагнитного поля в тензор энергии практически несуществен по сравнению с частью, соответствующей веществу. В нашей системе единиц энергия одного грамма вещества равна единице. По сравнению с ней можно пренебречь энергией электрического поля, а также энергией деформации вещества и даже химической энергией. Мы получим совершенно достаточное для наших целей приближение, если положим

$$\left.\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= \sigma\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds} \\ ds^2 &= g_{\mu\nu}\,dx_\mu\,dx_\nu \end{aligned}\right\}. \tag{102}$$

Здесь σ — плотность в состоянии покоя, т. е. плотность вещества в обычном смысле слова, измеренная с помощью единичного измерительного стержня и отнесенная к галилеевой системе координат, движущейся вместе с веществом.

Заметим далее, что в выбранной нами системе координат замена $g_{\mu\nu}$ на $-\delta_{\mu\nu}$ приведет лишь к сравнительно малой ошибке. Поэтому мы примем, что

$$ds^2 = -\sum dx_\mu^2. \tag{102a}$$

Предыдущие выводы не зависят от того, с какой скоростью движутся относительно избранной нами системы квазигалилеевых координат создающие поле массы. В астрономии, однако, приходится иметь дело с массами, скорости которых относительно используемой системы координат всегда малы по сравнению со скоростью света, т. е. при нашем выборе единицы времени малы по сравнению с 1. Следовательно, мы получим достаточное почти для всех практических целей приближение, если в (101) заменим запаздывающий потенциал обычным (незапаздывающим) потенциалом, и для масс, создающих поле, положим

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx_1}{ds} = \frac{dx_2}{ds} = \frac{dx_3}{ds} = 0, \\ &\frac{dx_4}{ds} = \frac{\sqrt{-1}\,dl}{dl} = \sqrt{-1}. \end{aligned}\right. \tag{103}$$

Тогда для $T^{\mu\nu}$ и $T_{\mu\nu}$ мы получим значения

$$\left.\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sigma \end{matrix}\right\}. \tag{104}$$

При этом T равно σ, а компоненты $T^*_{\mu\nu}$ равны

$$\left.\begin{array}{cccc} \frac{\sigma}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sigma}{2} \end{array}\right\}. \qquad (104а)$$

Используя эти значения, из (101) получаем

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{11} = \gamma_{22} = \gamma_{33} &= -\frac{\varkappa}{4\pi}\int \frac{\sigma\, dV_0}{r}; \\ \gamma_{44} &= \frac{\varkappa}{4\pi}\int \frac{\sigma\, dV_0}{r}, \end{aligned}\right. \qquad (101а)$$

а все остальные компоненты $\gamma_{\mu\nu}$ равны нулю. Последнее из этих уравнений, совместно с уравнением (90а), содержит в себе теорию тяготения Ньютона. Если мы заменим l на ct, то получим

$$\frac{d^2x_\mu}{dt^2} = \frac{\varkappa c^2}{8\pi}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\int \frac{\sigma\, dV_0}{r}. \qquad (90б)$$

Мы видим, что ньютоновская гравитационная постоянная K связана с постоянной $\varkappa$, входящей в наши уравнения, соотношением

$$K = \frac{\varkappa c^2}{8\pi}. \qquad (105)$$

Из известного численного значения K следует, что

$$\varkappa = \frac{8\pi K}{c^2} = \frac{8\pi \cdot 6,67 \cdot 10^{-8}}{9 \cdot 10^{20}} = 1,86 \cdot 10^{-27}. \qquad (105а)$$

Из соотношения (101) видно, что даже в первом приближении структура гравитационного поля коренным образом отличается от структуры поля, которая вытекает из теории Ньютона. Отличие заключается в том, что гравитационный потенциал является тензором, а не скаляром. Это не было обнаружено ранее, поскольку в уравнения движения материальных тел в первом приближении входит только одна компонента g_{44}.

Чтобы на основании наших результатов сделать заключение о поведении измерительных стержней и часов, необходимо обратить внимание на следующие факты. Согласно принципу эквивалентности, метрические соотношения евклидовой геометрии остаются справедливыми относительно декартовой системы координат бесконечно малых размеров, находящейся в соответствующем состоянии движения (свободное падение без вращения). Это утверждение верно и для локальных систем координат, имеющих малое ускорение относительно последней, а следовательно, и для систем координат, покоящихся относительно избранной нами системы. Для интервала между двумя соседними событиями в такой локальной системе координат мы имеем

$$ds^2 = -dX_1^2 - dX_2^2 - dX_3^2 + dT^2 = -dS^2 + dT^2,$$

где dS непосредственно измеряется при помощи измерительного стержня, а dT — при помощи часов, покоящихся относительно этой системы; это — естественно измеренные длина и время. Поскольку, с другой стороны, для ds^2 известно выражение через координаты x_ν, используемые в конечных областях,

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\,dx_\mu\,dx_\nu,$$

мы можем получить соотношение между естественным образом измеренными длиной и временем и соответствующими разностями координат. Так как разделение на пространство и время происходит в обеих системах координат одинаково, то, приравнивая два выражения для ds^2, мы получаем два соотношения. Если, согласно (101а), положим

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{\varkappa}{4\pi}\int\frac{\sigma\,dV_0}{r}\right)(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) +$$
$$+ \left(1 - \frac{\varkappa}{4\pi}\int\frac{\sigma\,dV_0}{r}\right)dl^2,$$

то с хорошим приближением получим

$$\left.\begin{aligned} &\sqrt{dX_1^2+dX_2^2+dX_3^2}=\\ &\qquad=\left(1+\frac{\varkappa}{8\pi}\int\frac{\sigma\,dV_0}{r}\right)\sqrt{dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2},\\ &dT=\left(1-\frac{\varkappa}{8\pi}\int\frac{\sigma\,dV_0}{r}\right)dl. \end{aligned}\right\}\tag{106}$$

Следовательно, в избранной нами системе координат единичный измерительный стержень имеет длину

$$1-\frac{\varkappa}{8\pi}\int\frac{\sigma\,dV_0}{r}.$$

Сделанный нами выбор системы координат гарантирует, что длина стержня зависит только от местонахождения стержня, но не от его ориентации. При другом выборе системы координат это было бы не так. Но какую бы мы ни выбрали систему координат, законы конфигурации твердых стержней не совпадут с законами евклидовой геометрии. Другими словами, мы не можем подобрать такую систему координат, в которой разности координат Δx_1, Δx_2, Δx_3, соответствующие концам произвольно ориентированного единичного измерительного стержня, всегда бы удовлетворяли соотношению $\Delta x_1^2+\Delta x_2^2+\Delta x_3^2=1$. В этом смысле пространство не является евклидовым, оно «искривлено». Из второго соотношения (106) следует, что промежутку времени между двумя ударами часов ($dT=1$) в принятых в нашей системе координат единицах соответствует «время»

$$1+\frac{\varkappa}{8\pi}\int\frac{\sigma\,dV_0}{r}.$$

В соответствии с этим часы идут тем медленнее, чем больше масса вещества, находящегося вблизи них. Отсюда мы заключаем, что спектральные линии излучения солнечной поверхности будут сдвинуты в красную сторону спектра по сравнению с соответствующими линиями земного происхождения на величину, примерно равную $2 \cdot 10^{-6}$ их длины волны. Сначала казалось, что этот важный вывод теории не согласуется с экспериментом, однако результаты последних лет делают существование этого эффекта более вероятным. Вряд ли можно сомневаться, что это следствие теории будет экспериментально подтверждено в ближайшем будущем[1].

Другое важное следствие теории, которое может быть подвергнуто экспериментальной проверке, касается траектории светового луча. В общей теории относительности скорость распространения света тоже постоянна, если ее измерять в локальной инерциальной системе координат. При нашем естественном выборе единицы времени эта скорость равна 1. Таким образом, согласно общей теории относительности, закон распространения света в произвольной системе координат описывается уравнением

$$ds^2 = 0.$$

В используемом нами приближении в избранной системе координат скорость света характеризуется, согласно (106), уравнением

$$\left(1+\frac{\varkappa}{4\pi}\int\frac{\sigma\,dV_0}{r}\right)(dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2)=\left(1-\frac{\varkappa}{4\pi}\int\frac{\sigma\,dV_0}{r}\right)dl^2.$$

Следовательно, скорость света L в нашей системе координат получается равной

$$\frac{\sqrt{dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2}}{dl}=1-\frac{\varkappa}{4\pi}\int\frac{\sigma\,dV_0}{r}. \qquad (107)$$

Отсюда можно сделать заключение, что при прохождении вблизи большой массы луч света отклоняется от первоначального направления. Если мы вообразим себе массу Солнца M сосредоточенной в начале нашей системы координат, то луч света, распространяющийся в плоскости (x_1, x_3) параллельно оси x_3 на расстоянии Δ от начала координат,

[1]Эффект красного смещения качественно подтвержден. — *Прим. ред.*

в итоге отклонится по направлению к Солнцу на величину

$$\alpha = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{L} \frac{dL}{dx_1} dx_3.$$

Выполняя интегрирование, получаем

$$\alpha = \frac{\varkappa M}{2\pi\Delta}. \tag{108}$$

Наличие этого отклонения, которое равно $1,7''$ для δ, равного радиусу Солнца, было с замечательной точностью подтверждено английской экспедицией по изучению солнечного затмения в 1919 г.; были проведены тщательные приготовления для получения более точных данных во время солнечного затмения 1922 г. Следует заметить, что и этот результат теории не зависит от выбора системы координат.

Здесь же уместно указать и на третье следствие теории, поддающееся экспериментальной проверке; оно связано с движением перигелия планеты Меркурий. Вековые изменения планетных орбит известны с такой точностью, что использовавшееся нами приближение становится недостаточным для сравнения теории с данными опыта. Нам необходимо вернуться к общим уравнениям поля (96). При решении этой проблемы я пользовался методом последовательных приближений. С тех пор, однако, проблема статического центрально-симметричного гравитационного поля была полностью решена Шварцшильдом и др.; особенно изящен вывод, данный Г. Вейлем в его книге «Пространство, время, материя»[2]. Вычисления несколько упрощаются, если исходить не из уравнения (96) непосредственно, а из вариационного принципа, эквивалентного этому уравнению. Укажем здесь лишь общий ход

[2]H. Weil. *Raum, Zeit, Materie.* 5 Aufl. Berlin, 1923.

рассуждений, чтобы дать понятие о методе решения.

В случае статического поля ds^2 должно иметь вид

$$\left.\begin{aligned} ds^2 &= -d\sigma^2 + f^2\,dx_4^2 \\ d\sigma^2 &= \sum_1^3 \gamma_{\alpha\beta}\,dx_\alpha\,dx_\beta \end{aligned}\right\}, \tag{109}$$

в последнем равенстве суммирование распространяется лишь на пространственные координаты. Центральная симметрия поля требует, чтобы $\gamma_{\mu\nu}$ имели вид

$$\gamma_{\alpha\beta} = \mu\delta_{\alpha\beta} + \lambda x_\alpha x_\beta, \tag{110}$$

а f^2, μ и λ были бы функциями только от $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$. Одна из этих трех функций может быть выбрана произвольно, так как выбор нашей системы координат a priori совершенно произволен; действительно, подстановкой

$$x_4' = x_4,$$
$$x_\alpha' = F(r)x_\alpha$$

всегда можно добиться того, чтобы одна из этих трех функций была любой наперед заданной функцией r'. Поэтому без ограничения общности вместо (110) можно положить

$$\gamma_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \lambda x_\alpha x_\beta. \tag{110a}$$

Таким образом, $g_{\mu\nu}$ выражаются через две величины λ и f. Зависимость этих величин от r определяется путем подстановки их в уравнение (96), в котором $\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$ вычислены с помощью соотношений (107) и (108):

$$\left.\begin{aligned} &\Gamma^\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\frac{x_\sigma}{r}\frac{\lambda' x_\alpha x_\beta + 2\lambda r\delta_{\alpha\beta}}{1+\lambda r^2} \\ &\qquad (\text{при } \alpha, \beta, \sigma = 1, 2, 3), \\ &\Gamma^4_{44} = \Gamma^\alpha_{4\beta} = \Gamma^4_{\alpha\beta} = 0 \\ &\qquad (\text{при } \alpha, \beta = 1, 2, 3), \\ &\Gamma^4_{4\alpha} = \frac{1}{2}f^{-2}\frac{\partial f^2}{\partial x_\alpha}, \quad \Gamma^\alpha_{44} = -\frac{1}{2}f^{-2}\frac{\partial f^2}{\partial x_\alpha}. \end{aligned}\right\} \tag{108a}$$

С помощью этих соотношений из уравнений поля получается следующее решение Шварцшильда:

$$ds^2 = \left(1-\frac{A}{r}\right)dl^2 - \left[\frac{dr^2}{1-\frac{A}{r}} + r^2(\sin^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2)\right], \quad (109)$$

мы положили

$$\left.\begin{aligned} x_4 &= 1 \\ x_1 &= r\sin\theta\sin\varphi \\ x_2 &= r\sin\theta\cos\varphi \\ x_3 &= r\cos\theta \\ A &= \frac{\varkappa M}{\pi 4} \end{aligned}\right\}. \quad (109\text{a})$$

Здесь M — масса Солнца, сферически-симметрично распределенная вокруг начала координат. Решение (109) справедливо только вне этой массы, где все $T_{\mu\nu}$ равны нулю. Если движение планеты происходит в плоскости (x_1, x_2), то мы должны заменить (109) на

$$ds^2 = \left(1-\frac{A}{r}\right)dl^2 - \frac{dr^2}{1-\frac{A}{r}} - r^2\, d\varphi^2. \quad (109\text{б})$$

При расчете орбиты планеты будем исходить из уравнения (90). Из первых соотношений (108а) и уравнения (90 мы получаем (для индексов 1, 2, 3)

$$\frac{d}{ds}\left(x_\alpha\frac{dx_\beta}{ds} - x_\beta\frac{dx_\alpha}{ds}\right) = 0,$$

или, после интегрирования и перехода к полярным координатам,

$$r^2\frac{d\varphi}{ds} = \text{const.} \quad (111)$$

Для $\mu = 4$ из (90) получаем

$$0 = \frac{d^2l}{ds^2} + \frac{1}{f^2}\frac{df^2}{dx_\alpha}\frac{dx_\alpha}{ds} = \frac{d^2l}{ds^2} + \frac{1}{f^2}\frac{df^2}{ds}.$$

Отсюда, после умножения на f^2 и интегрирования, имеем:

$$f^2 \frac{dl}{ds} = \text{const.} \tag{112}$$

Соотношения (109б), (111) и (112) дают нам три уравнения для четырех переменных s, r, l и φ, из которых орбита планеты может быть вычислена таким же образом, как и в классической механике. Наиболее важным результатом этих вычислений является вековое вращение эллиптической орбиты планеты в направлении обращения планеты по орбите, причем угол поворота орбиты за одно обращение планеты равен

$$\frac{24\pi^3 a^2}{(1-e^2)c^2T^2}, \tag{113}$$

где a — большая полуось орбиты в сантиметрах, e — эксцентриситет орбиты, $c = 3 \cdot 10^{10}$ *см/сек* — скорость света в пустоте, T — период обращения планеты в секундах. Таким путем удается объяснить движение перигелия Меркурия, которое было известно еще сто лет назад (со времен Леверье), но которому теоретическая астрономия до сих пор не могла дать удовлетворительного объяснения.

Не представляет труда изложить теорию электромагнитного поля Максвелла на языке общей теории относительности. Для этого необходимо использовать правила образования тензоров (81), (82) и (77). Введем четырехмерный вектор-потенциал электромагнитного поля φ_μ, являющийся тензором первого ранга. Тензор электромагнитного поля может быть определен с помощью соотношения

$$\varphi_{\mu\nu} = \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\mu}. \tag{114}$$

Вторая пара уравнений Максвелла записывается тогда в виде тензорного уравнения, вытекающего из (114):

$$\frac{\partial \varphi_{\mu\nu}}{\partial x_\rho} + \frac{\partial \varphi_{\nu\rho}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial \varphi_{\rho\mu}}{\partial x_\nu} = 0, \tag{114a}$$

а первая пара уравнений Максвелла может быть представлена с помощью тензорной плотности в виде

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}\mathfrak{F}^{\mu\nu} = \mathfrak{J}^{\mu}, \tag{115}$$

где

$$\mathfrak{F}^{\mu\nu} = \sqrt{-g}\, g^{\mu\sigma} g^{\nu\tau} \varphi_{\sigma\tau},$$
$$\mathfrak{J}^{\mu} = \sqrt{-g}\, \rho \frac{dx_\mu}{ds}.$$

Если подставить тензор энергии электромагнитного поля в правую часть уравнения (96) и взять дивергенцию от обоих частей, то получится уравнение (115) для частного случая $\mathfrak{J}^{\mu} = 0$. Такое включение теории электричества в схему общей теории относительности многие теоретики считали необоснованным и неудовлетворительным. Кроме того, таким путем нельзя объяснить равновесие электрических зарядов, из которых построены элементарные заряженные частицы. Более предпочтительной была бы теория, в которой гравитационное и электромагнитное поля не выступали бы как логически разобщенные понятия. Г. Вейль и недавно Т. Калуца установили в этом направлении ряд замечательных теорем, но я уверен, что они не приближают нас к действительному решению основной проблемы. Я не буду здесь входить в подробности этого вопроса, а вкратце остановлюсь на так называемой космологической проблеме, так как без этого остаются в некотором смысле неудовлетворительными соображения, приведшие нас к общей теории относительности.

Наши прежние рассуждения, основывавшиеся на уравнениях поля (96), исходили из предположения, что пространство в целом является пространством Евклида – Галилея и что этот характер пространства нарушается только присутствием масс. Такое предположение безусловно оправдано до тех пор, пока мы имеем дело с областями пространства, с которыми обычно работают астрономы. Однако совсем другой вопрос, остаются ли квазиевклидовыми сколь угодно большие области пространства. Чтобы пояснить это, рассмотрим пример из теории поверхностей, которым мы уже неоднократно пользовались. Если какая-то часть поверхности на глаз кажется практически плоской, то это вовсе не означает, что вся поверхность является плоскостью; эта поверхность с таким же успехом может быть сферой достаточно большого радиуса. Вопрос о том, является ли Вселенная в целом неевклидовой, многократно обсуждался с геометрической точки зрения еще до создания теории относительности. Однако с развитием последней эта проблема вступила в новый этап, так как, согласно общей теории относительности, геометрические свойства тел не задаются сами по себе, а связаны с распределением масс.

Если бы Вселенная была квазиевклидова, то это означало бы, что Мах был совершенно неправ, полагая, что инерция так же, как и тяготение, зависит от характера взаимодействия между телами. Действительно, в этом случае при удачном выборе системы координат $g_{\mu\nu}$ были бы постоянными на бесконечности, как это принимается в специальной теории относительности, а в конечных областях при подходящем выборе системы координат лишь немного отклонялись бы от этих постоянных значений вследствие влияния масс в этих областях. Физические свойства пространства тогда были бы в общих чертах не связаны с материей, хотя и не были бы полностью независимыми от нее, но были бы обусловлены ею в весьма слабой степени. Такая дуалистическая концепция неудовлетворительна уже сама по себе; кроме того, против нее можно выдвинуть веские физические соображения, которые мы и рассмотрим ниже.

Гипотеза, согласно которой Вселенная бесконечна и евклидова на бесконечности, является, с точки зрения теории относительности, довольно сложной гипотезой. На языке общей теории относительности такая гипотеза требует, чтобы тензор Римана четвертого ранга R_{iklm} обращался бы в нуль на бесконечности, что дает 20 независимых условий, тогда как только 10 компонент тензора кривизны $R_{\mu\nu}$ входят в уравнения гравитационного поля. Нельзя удовлетвориться постулированием столь далеко идущего ограничения, не имея для этого каких-либо физических оснований.

Между тем теория относительности дает основания полагать, что Мах был на правильном пути, когда он высказал мысль о зависимости инерции от характера взаимодействия между телами. Ниже мы покажем, что, согласно нашим уравнениям, инертные массы действуют друг на друга в смысле относительности инерции, хотя и очень слабо. Что мы можем ожидать, если будем следовать идеям Маха?

1. Инерция тела должна возрастать по мере скопления весомых масс вблизи него.

2. Тело должно испытывать ускоряющую силу, когда близлежащие массы ускоряются; эта сила по направлению должна совпадать с направлением ускорения.

3. Вращающееся полое тело должно создавать внутри себя «поле кориолисовых сил», стремящееся отклонить движущиеся тела в направлении вращения, а также создавать радиальное поле центробежных сил.

Мы сейчас покажем, что все эти три эффекта, существование которых следует ожидать с точки зрения идей Маха, действительно существуют согласно нашей теории; величина этих эффектов так мала, что об их экспериментальном подтверждении в лабораторных условиях нечего и думать. Для этого мы вернемся к уравнениям движения материальной точки (90) и исследуем более высокие приближения, чем то, которое привело нас к уравнению (90а).

Прежде всего мы будем считать γ_{44} величиной первого порядка малости. Квадрат скорости тела, движущегося под влиянием гравитационных сил, согласно выражению для энергии, есть величина того же порядка. Поэтому логично считать скорости как рассматриваемых тел, так и тел, создающих гравитационное поле, малыми величинами порядка 1/2. Уравнения, следующие из уравнений движения (90) и уравнений поля (101), мы примем в том виде, который получится, если во втором слагаемом в (90) оставить лишь члены, линейные по скоростям. Далее, мы не будем считать ds и dl равными друг другу, а, учтя дальнейшие члены разложения, положим

$$ds = \sqrt{g_{44}}\, dl = \left(1 - \frac{\gamma_{44}}{2}\right) dl.$$

Из (90) мы получаем сначала

$$\frac{d}{dl}\left[\left(1 + \frac{\gamma_{44}}{2}\right)\frac{dx_\mu}{dl}\right] = -\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx_\alpha}{dl}\frac{dx_\beta}{dl}\left(1 + \frac{\gamma_{44}}{2}\right). \qquad (116)$$

Из (101) в нашем приближении следует

$$\left.\begin{aligned} -\gamma_{11} = -\gamma_{22} = -\gamma_{33} = \gamma_{44} &= \frac{\varkappa}{4\pi}\int \frac{\sigma\, dV_0}{r}, \\ \gamma_{4\alpha} &= -\frac{i\varkappa}{2}\int \frac{\sigma \frac{dx_\alpha}{ds}\, dV_0}{r}, \\ \gamma_{\alpha\beta} &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (117)$$

где α и β означают только пространственные индексы.

В правой части уравнения (116) мы можем заменить $1 + (\gamma_{44}/2)$ на 1 и $-\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ на $\begin{bmatrix} 44 \\ \mu \end{bmatrix}$. Кроме того, легко видеть, что в нашем приближении мы должны положить

$$\begin{bmatrix}44\\ \mu\end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\frac{\partial\gamma_{44}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial\gamma_{4\mu}}{\partial x_4},$$
$$\begin{bmatrix}\alpha 4\\ \mu\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\gamma_{4\mu}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial\gamma_{4\alpha}}{\partial x_\mu}\right),$$
$$\begin{bmatrix}\alpha\beta\\ \mu\end{bmatrix} = 0,$$

где α, β и μ обозначают только пространственные индексы. Мы получаем тогда из (116) в обычных векторных обозначениях

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dl}\left[(1+\bar{\sigma})\mathbf{v}\right] &= \operatorname{grad}\bar{\sigma} + \frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial l} + [\operatorname{rot}\mathfrak{A},\, \mathbf{v}],\\ \bar{\sigma} &= \frac{\varkappa}{8\pi}\int\frac{\sigma\, dV_0}{r},\\ \mathfrak{A} &= \frac{\varkappa}{2}\int\frac{\sigma\frac{dx_\alpha}{dl}\, dV_0}{r}. \end{aligned}\right\} \tag{118}$$

Из уравнений движения (118) действительно следует, что:

1. Инертная масса пропорциональна $1+\bar{\sigma}$ и поэтому возрастает по мере приближения весомых масс к нашему «пробному телу».

2. Ускоряющиеся массы оказывают индукционное действие на пробное тело в направлении ускорения, что описывается членом $\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial l}$.

3. Материальная точка, движущаяся внутри полого вращающегося тела перпендикулярно оси вращения, отклоняется в направлении вращения (силы Кориолиса). Упоминавшийся выше центробежный эффект внутри вращающегося полого тела также

следует из теории, как это было показано Тиррингом[3].

Хотя вследствие малости постоянной $\varkappa$ все эти эффекты нельзя наблюдать на опыте, они, несомненно, существуют. Это следует из общей теории относительности. Существование этих эффектов является сильным аргументом в пользу идей Маха об относительности всех инерциальных воздействий. Последовательно проводя эту точку зрения до конца, мы должны ожидать, что *вся* инерция, т. е. *все* поле $g_{\mu\nu}$, определяется, в первую очередь, распределением материи во Вселенной, а не граничными условиями на бесконечности.

Для построения удовлетворительной концепции поля $g_{\mu\nu}$ космических размеров, по-видимому, важен тот факт, что относительные скорости звезд малы по сравнению со скоростью света. Действительно, отсюда следует, что при соответствующем выборе координатной системы, g_{44} почти постоянна во Вселенной, по крайней мере в той ее части, в которой имеется материя. Более того, кажется естественным допустить, что звезды имеются во всех частях Вселенной. Тогда можно предположить, что непостоянство g_{44} связано только с тем обстоятельством, что вещество не распределено непрерывно, а сосредоточено в отдельных небесных телах или системах тел. Если мы, желая изучить геометрические свойства Вселенной как целого, захотим пренебречь этими местными неоднородностями плотности вещества и поля $g_{\mu\nu}$, то естественно заменить фактическое распределение масс непрерывным распределением и, кроме того, приписать этому распределению постоянную плотность σ. В такой воображаемой Вселенной все про-

---

[3]То, что центробежное действие неразрывно связано с существованием кориолисова поля, можно понять даже без вычислений. Для этого достаточно рассмотреть координатную систему, равномерно вращающуюся по отношению к инерциальной системе. Наши общековариантные уравнения, конечно, применимы и в такой системе координат.

странственные точки и направления в пространстве будут геометрически эквивалентны; в своих пространственных измерениях она будет обладать постоянной кривизной и будет цилиндрической по отношению к x_4-координате. Особенно привлекательным в этой схеме является то, что Вселенная оказывается пространственно ограниченной и, согласно нашему предположению о постоянстве плотности σ, обладает постоянной кривизной, будучи сферической или эллиптической. В этом случае граничные условия на бесконечности, столь неудобные с точки зрения общей теории относительности, заменяются гораздо более естественными условиями для замкнутой поверхности.

Итак, согласно сказанному, положим

$$ds^2 = dx_4^2 - \gamma_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu, \tag{119}$$

где индексы μ и ν пробегают только значения от 1 до 3. Величины $\gamma_{\mu\nu}$ должны быть такими функциями x_1, x_2 и x_3, чтобы описывать трехмерный континуум с постоянной положительной кривизной. Мы должны теперь исследовать, можно ли удовлетворить такому предположению, исходя из уравнений гравитационного поля.

Чтобы ответить на этот вопрос, мы должны сначала найти дифференциальные соотношения, которым удовлетворяет трехмерное многообразие постоянной кривизны. Сферическое трехмерное многообразие, погруженное в евклидово пространство четырех измерений[4], определяется уравнениями:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = a^2,$$
$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 = ds^2.$$

Исключая из обоих уравнений x_4, получаем

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + \frac{(x_1\, dx_1 + x_2\, dx_2 + x_3\, dx_3)^2}{a^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}.$$

[4]Четвертое пространственное измерение вводится здесь, конечно, исключительно из соображений математического удобства.

Пренебрегая членами, содержащими x_ν в третьей и более высоких степенях, мы можем вблизи начала координат положить

$$ds^2 = \left(\delta_{\mu\nu} + \frac{x_\mu x_\nu}{a^2}\right) dx_\mu dx_\nu.$$

Выражение в скобках дает $g_{\mu\nu}$ рассматриваемого многообразия в окрестности начала координат. Поскольку первые производные $g_{\mu\nu}$, а следовательно, и $\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$ обращаются в нуль в начале координат, величина $R_{\mu\nu}$ для этого многообразия может быть очень легко вычислена в начале координат при помощи формулы (88). Тогда получим

$$R_{\mu\nu} = \frac{2}{a^2}\delta_{\mu\nu} = \frac{2}{a^2}g_{\mu\nu}.$$

Поскольку равенство $R_{\mu\nu} = (2/a^2)g_{\mu\nu}$ ковариантно, а все точки нашего многообразия геометрически эквивалентны, это соотношение справедливо для любой системы координат и в любой точке многообразия. Во избежание путаницы, с четырехмерным континуумом будем в дальнейшем величины, относящиеся к трехмерному континууму, обозначать греческими буквами, соответственно чему перепишем приведенное выше равенство в виде

$$P_{\mu\nu} = -\frac{2}{a^2}\gamma_{\mu\nu}. \tag{120}$$

Применим теперь уравнения поля (96) к нашему случаю. Из (119) мы получим для четырехмерного многообразия:

$$\left.\begin{array}{l} R_{\mu\nu} = P_{\mu\nu} \quad \text{для индексов от 1 до 3} \\ R_{14} = R_{24} = R_{34} = R_{44} = 0 \end{array}\right\}. \tag{121}$$

Чтобы написать правую часть уравнения (96), рассмотрим тензор энергии для вещества, распределенного наподобие облака пыли. Согласно сказанному выше, мы должны положить

$$T^{\mu\nu} = \sigma \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds},$$

считая при этом, что все находится в покое. Но дополнительно мы добавим к этому выражению член, описывающий давление. Необходимость его можно физически обосновать следующим образом. Вещество состоит из электрически заряженных частиц. В рамках теории Максвелла они не могут быть описаны как свободные от особенностей электромагнитные поля. Чтобы не противоречить фактам, в выражение для энергии необходимо ввести дополнительные члены, не содержащиеся в теории Максвелла, которые обеспечили бы устойчивость электрически заряженных частиц, несмотря на взаимное отталкивание составляющих их одноименно заряженных частей. Именно в связи с этим Пуанкаре предположил, что внутри этих частиц существует давление, которое и компенсирует электростатическое отталкивание. Нельзя, однако, определенно утверждать, что это давление обращается в нуль вне частиц. Мы придем к согласию с этими представлениями, если в нашем феноменологическом рассмотрении добавим член, описывающий давление. Это давление, однако, не следует смешивать с гидродинамическим, поскольку оно служит лишь энергетическим выражением динамических связей внутри вещества. В этом смысле мы полагаем

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \sigma \frac{dx_\alpha}{ds} \frac{dx_\beta}{ds} - g_{\mu\nu} p. \tag{122}$$

В нашем частном случае мы должны, следовательно, положить

$$T_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} p \quad (\text{для } \mu \text{ и } \nu \text{ от 1 до 3}),$$
$$T_{44} = \sigma - p,$$
$$T = -\gamma^{\mu\nu} \gamma_{\mu\nu} p + \sigma - p = \sigma - 4p.$$

Замечая, что уравнения поля (96) можно записать в форме

$$R_{\mu\nu} = -\varkappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right),$$

из (96) получаем уравнения:

$$\frac{2}{a^2}\gamma_{\mu\nu} = -\varkappa\left(\frac{\sigma}{2} - p\right)\gamma_{\mu\nu},$$
$$0 = -\varkappa\left(\frac{\sigma}{2} + p\right).$$

Отсюда следует, что

$$\left.\begin{aligned} p &= -\frac{\sigma}{2} \\ a &= \sqrt{\frac{2}{\varkappa\sigma}} \end{aligned}\right\}. \qquad (123)$$

Если Вселенная квазиевклидова, и, следовательно, ее радиус кривизны бесконечен, то σ должна быть равна нулю. Однако маловероятно, чтобы средняя плотность вещества во Вселенной была бы действительно равна нулю. Это является нашим третьим аргументом против предположения, что Вселенная квазиевклидова. Вряд ли можно также ожидать, что обращается в нуль наше гипотетическое давление, хотя физическая природа этого давления сможет быть выяснена только после того, как мы глубже поймем законы электромагнитного поля. Согласно второму из уравнений (123), радиус Вселенной a определяется через полную массу материи M с помощью соотношения

$$a = \frac{M\varkappa}{4\pi^2}. \qquad (124)$$

Из этого соотношения становится совершенно ясной полная зависимость геометрических свойств от физических.

Итак, мы можем выдвинуть следующие аргументы против концепции пространственно-бесконечной Вселенной, которые в то же время являются аргументами в пользу представлений о пространственно-ограниченной Вселенной.

1. С точки зрения теории относительности условия для замкнутой поверхности гораздо проще, чем соответствующие граничные условия на бесконечности в случае квазиевклидовой структуры Вселенной.

2. Высказанная Махом идея, что инерция определяется взаимодействием тел, содержится в первом приближении в уравнениях теории относительности; из этих уравнений следует, что инерция, по крайней мере частично, зависит от взаимодействия между массами. Поскольку кажется неудовлетворительным предположение о том, что инерция частично зависит от взаимодействия, а частично от независимых свойств пространства, идеи Маха становятся более правдоподобными. Но идеи Маха согласуются только с предположением о конечной Вселенной, ограниченной в пространстве, и не согласуются с концепцией квазиевклидовой бесконечной Вселенной. С гносеологической точки зрения, гораздо более оправдана мысль, что механические свойства пространства полностью определяются материей, а это может быть только в случае пространственно-ограниченной Вселенной.

3. Бесконечная Вселенная возможна только, если средняя плотность материи во Вселенной равна нулю. Хотя такое предположение и возможно логически, оно менее вероятно, чем предположение о конечной средней плотности материи во Вселенной.

Приложение I

О «КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ ПРОБЛЕМЕ»[1]

С момента первого издания этой небольшой книжки в теории относительности были получены некоторые новые результаты. На нескольких из них мы здесь кратко остановимся.

Первым шагом вперед явилось окончательное доказательство существования красного смещения спектральных линий, вызываемого (отрицательным) гравитационным потенциалом в месте возникновения лучей (см. стр. 92). Доказательство стало возможным после открытия так называемых «звезд-карликов», средняя плотность которых превышает плотность воды примерно в 10^4 раз. Для таких звезд (например, темный спутник Сириуса), масса и радиус которых могут быть определены[2], теория предсказывает красное смещение примерно в 20 раз большее, чем у Солнца. И действительно, было показано, что оно имеет ожидаемый порядок величины.

Второе достижение, о котором мы здесь упомянем, связано с законами движения гравитирующего тела. В первоначальной формулировке теории закон движения такого тела вводился как независимое предположение в дополнение к законам грави

---

[1] *On the «Cosmologic Problem»*. Дополнение к книге *The Meaning of Relativity*, 2 nd Edition, Princeton, 1945, в которое оно вошло как Приложение I. — *Прим. ред.*)

[2] Масса определяется спектроскопическими методами из данных о движении Сириуса, на который его спутник действует согласно закону Ньютона. Радиус определяется из яркости и из интенсивности излучения на единицу площади, которая может быть определена по температуре его излучения.

тационного поля; согласно этому предположению, гравитирующая частица движется по геодезической линии [см. уравнение (90)]. Такой результат следовал из предполагаемой справедливости закона инерции Галилея в случае существования «истинного» гравитационного поля. Теперь показано, что этот закон движения, обобщенный на случай произвольно большой гравитирующей массы, может быть выведен уже из одних уравнений поля для пустого пространства. Согласно этому выводу, закон движения определяется условием, что поле не может обращаться в бесконечность в точках, лежащих вне масс, создающих поле.

Третье достижение теории связано с так называемой «космологической проблемой». Ввиду важности этого вопроса, а также ввиду того, что дискуссия по этому вопросу ни в коей мере еще не завершена, мы разберем его подробно. К более детальному обсуждению этого вопроса меня побуждает также и то, что в современной его трактовке, как мне кажется, недостаточно подчеркивают наиболее важные узловые моменты этой проблемы.

Грубо сформулировать проблему можно следующим образом. Судя по нашим наблюдениям над неподвижными звездами, мы в достаточной степени уверены, что систему неподвижных звезд, вообще говоря, нельзя рассматривать как некий остров, плавающий в бесконечном пустом пространстве, и что нет чего-либо подобного центру тяжести всего существующего вещества. Более того, мы склоняемся к убеждению, что в пространстве средняя плотность вещества не равна нулю.

Следовательно, возникает вопрос: можно ли эту подсказываемую опытом гипотезу согласовать с общей теорией относительности?

Сначала мы должны сформулировать проблему более точно. Рассмотрим конечную, но настолько большую часть Вселенной, что средняя плотность содержащегося в ней вещества может быть представлена приближенно непрерывной функцией от (x_1, x_2, x_3, x_4). Такое подпространство можно приближенно рассматривать как инерциальную систему (пространство Минковского), к которой мы и будем относить движение звезд. Ее всегда можно выбрать так, чтобы средняя скорость вещества по отношению к этой системе во всех направлениях была равна нулю. Остается (почти беспорядочное) движение отдельных звезд, подобное движению молекул газа. Существенно, что скорости звезд, как это известно из опыта, весьма малы по сравнению со скоростью света. Поэтому можно временно совершенно отвлечься от этого относительного движения и рассматривать звездную материю как облако пыли, в котором нет (беспорядочного) движения частиц друг относительно друга.

Перечисленные условия ни в коей мере не достаточны для того, чтобы сделать задачу вполне определенной. Наиболее радикальным, но простым предположением будет условие, что (естественным образом измеренная) плотность вещества ρ постоянна всюду в (четырехмерном) пространстве, метрика при соответствующем выборе координат не зависит от x_4 и однородна и изотропна по отношению к x_1, x_2, x_3.

Именно этот случай я сначала считал наиболее естественным для приближенного описания физического пространства в целом, и он рассмотрен на стр. 101–105 этой книги. Возражением против такого решения является то, что приходится вводить отрицательное давление, для чего нет никаких физических оснований. Чтобы сделать это решение возможным, я сначала ввел в уравнения вместо указанного давления новый член, разрешенный с точки зрения теории относительности. Измененные таким образом уравнения гравитации записывались следующим образом:

$$\left(R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R\right) + \Lambda g_{ik} + \varkappa T_{ik} = 0, \qquad (I.1)$$

где Λ — универсальная постоянная («космологическая постоянная»). Введение этого добавочного члена усложняло теорию и, таким образом, сильно вредило логической простоте. Это могло быть оправдано только трудностью, связанной с почти неизбежным введением конечной средней плотности вещества. Следует заметить, кстати, что и в теории Ньютона существует та же самая трудность.

Выход из этой дилеммы был найден математиком Фридманом[3]. Его результат затем получил неожиданное подтверждение в открытом Хэбблом расширении звездной системы (красное смещение спектральных линий, которое растет линейно с расстоянием). Последующее изложение представляет собой не что иное, как изложение идеи Фридмана.

§ 1. Четырехмерное пространство, изотропное по отношению к трем измерениям

Наши наблюдения показывают, что видимые нами системы звезд распределены примерно с одинаковой плотностью по всем направлениям. Это приводит нас к предположению, что *пространственная* изотропия системы имеет место для всех наблюдателей и для любого места и времени, лишь бы наблюдатель находился в состоянии покоя относительно окружающего его вещества. С другой стороны, мы более не делаем предположения, что для наблюдателя, находящегося в состоянии покоя относительно окружающего его вещества, плотность вещества остается постоянной во времени. Тем самым мы отказываемся от предположения, что метрика не зависит от времени.

Нам надо теперь найти математическую формулировку условия, что Вселенная всюду изотропна (*в пространственном смысле*). Через каждую точ-

[3]Он показал, что из уравнений поля можно получить конечное значение плотности во всем (трехмерном) пространстве, не изменяя этих уравнений *ad hoc*; см. Z. Phys., 1922, **10**, 377. (Работа перепечатана в УФН, 80, 447, 1963. — *Прим. ред.*)

ку (четырехмерного) пространства P проходит траектория какой-нибудь частицы (в дальнейшем мы ее для краткости будем называть «геодезической»). Пусть P и Q — две бесконечно близкие точки такой геодезической. Мы должны тогда потребовать, чтобы выражение для поля было инвариантным относительно любого вращения системы координат, оставляющего неподвижными точки P и Q. Это должно выполняться для произвольного элемента любой геодезической[4].

Приведенное выше условие инвариантности подразумевает, что вся геодезическая лежит на оси вращения и что ее точки остаются на месте при вращении системы координат. Это означает, что решение должно быть инвариантным относительно всех вращений системы координат вокруг ∞^3 геодезических.

Ради краткости мы не будем останавливаться на дедуктивном выводе решения этой задачи. Однако для трехмерного пространства интуитивно кажется очевидным, что метрика, инвариантная относительно вращений вокруг двумерного континуума линий, должна обладать центральной симметрией (при подходящем выборе координат). Здесь оси вращения — радиально расходящиеся прямые, которые из соображений симметрии должны быть геодезическими. Поверхности постоянного радиуса будут тогда поверхностями постоянной (положительной) кривизны, которые всюду перпендикулярны (радиальным) геодезическим. Таким образом, мы на инвариантном языке получаем следующий результат.

Существует семейство поверхностей, ортогональных геодезическим. Каждая из этих поверхностей является поверхностью постоянной кривизны. Отрезки всех геодезических, заключенные между любыми двумя поверхностями семейства, равны.

---

[4]Это условие не только накладывает определенные ограничения на метрику, но и требует, чтобы для каждой геодезической существовала такая система координат, в которой поле было бы инвариантно относительно вращений вокруг геодезической.

Замечание. Интуитивно полученный нами результат не является общим, так как поверхности семейства могут обладать постоянной отрицательной кривизной или быть евклидовыми (нулевая кривизна).

Четырехмерный случай, интересующий нас, совершенно аналогичен. Более того, нет существенной разницы и тогда, когда метрика пространства имеет вид $(-+++)$; необходимо только выбирать радиальные направления временноподобными и, соответственно, направления на поверхностях семейства — пространственноподобными. Оси локальных световых конусов во всех точках лежат на радиальных линиях.

§ 2. Выбор координат

Вместо четырех координат, в которых пространственная изотропия Вселенной проявляется наиболее ясно, теперь выберем другие координаты, более удобные с точки зрения их физической интерпретации.

В качестве временноподобных линий, на которых x_1, x_2 и x_3 постоянны, а меняется только x_4, возьмем геодезические траектории частицы, которыми в случае сферической симметрии являются прямые линии, проходящие через центр. Пусть, далее, x_4 равно метрическому расстоянию от центра. В таких координатах метрика имеет вид

$$\left.\begin{aligned} ds^2 &= dx_4^2 - d\sigma^2 \\ d\sigma^2 &= \gamma_{ik}\, dx_i\, dx_k \quad (i,\, k = 1,\, 2,\, 3) \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(I.2)}$$

Величина $d\sigma^2$ определяет метрику на одной из сферических гиперповерхностей. Величины γ_{ik}, принадлежащие различным поверхностям, должны тогда (в силу центральной симметрии) иметь одну и ту же форму на всех гиперповерхностях и отличаться лишь положительным множителем, зависящим только от x_4:

$$\gamma_{ik} = \underset{0}{\gamma_{ik}} G^2, \tag{I.2а}$$

где $\underset{0}{\gamma}$ зависят только от x_1, x_2 и x_3, а G есть функция только x_4. Тогда

$$\underset{0}{d\sigma} = \underset{0}{\gamma_{ik}}\, dx_i\, dx_k \quad (i,\, k = 1,\, 2,\, 3) \tag{I.2б}$$

задает в пространстве трех измерений определенную метрику постоянной кривизны — одну и ту же для всех G.

Такая метрика характеризуется соотношением

$$\underset{0}{R_{iklm}} - B\bigl(\underset{0}{\gamma_{il}}\underset{0}{\gamma_{km}} - \underset{0}{\gamma_{im}}\underset{0}{\gamma_{kl}}\bigr) = 0. \tag{I.2в}$$

Мы можем выбрать систему координат (x_1, x_2, x_3) так, что элемент длины станет конформно евклидовым:

$$\underset{0}{d\sigma}^2 = A^2(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2), \qquad \text{т. е.} \qquad \underset{0}{\gamma_{ik}} = A^2\delta_{ik}. \tag{I.2г}$$

Здесь A — положительная функция, зависящая только от $r(r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$. Путем подстановки в уравнения мы получаем для A два уравнения:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{r}\left(\frac{A'}{Ar}\right)' + \left(\frac{A'}{Ar}\right)^2 = 0 \\ -\frac{2A'}{Ar} - \left(\frac{A'}{A}\right)^2 - BA^2 = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{I.3}$$

Первому уравнению удовлетворяет значение

$$A = \frac{c_1}{c_2 + c_3 r^2}, \tag{I.3а}$$

где постоянные пока произвольны. Второе уравнение тогда дает

$$B = 4\frac{c_2 c_3}{c_1^2}. \tag{I.3б}$$

Относительно постоянных c мы получаем следующее: — если A при $r = 0$ должно быть положительным, то c_1 и c_2 имеют один и тот же знак. Так как изменение знака всех трех постоянных не меняет A, мы можем считать c_1 и c_2 положительными. Можно также положить $c_2 = 1$. Более того, так как положительный множитель всегда можно включить в G^2, можно, не нарушая общности, считать, что $c_1 = 1$. Итак, мы можем положить

$$A = \frac{1}{1 + cr^2}; \qquad B = 4c. \tag{I.3в}$$

Теперь возможны три случая:

$$\begin{aligned} &c > 0 \quad \text{(сферическое пространство)},\\ &c < 0 \quad \text{(псевдосферическое пространство)},\\ &c = 0 \quad \text{(евклидово пространство)}.\end{aligned}$$

При помощи преобразования подобия ($x'_i = ax_i$, где a — постоянная) мы можем далее получить $c = 1/4$ для первого случая и $c = -1/4$ для второго. Тогда для наших трех случаев соответственно имеем:

$$\left.\begin{aligned} &A = \frac{1}{1 + \frac{r^2}{4}}; \qquad &&B = 1\\ &A = \frac{1}{1 - \frac{r^2}{4}}; \qquad &&B = -1\\ &A = 1; \qquad &&B = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{I.3г}$$

В сферическом случае «длина окружности» единичного пространства ($G = 1$) равна

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dr}{1 + \frac{r^2}{4}} = 2\pi;$$

«радиус» единичного пространства равен 1. Во всех трех случаях функция времени G есть мера изменения со временем расстояния между двумя точками вещества (измеренного в пространственном сечении). В сферическом случае G равно радиусу пространства в момент времени x_4.

Резюме. Гипотеза о *пространственной* изотропии нашей идеализированной Вселенной приводит к следующей метрике:

$$ds^2 = dx_4^2 - G^2A^2(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2), \tag{I.2}$$

где G зависит только от x_4, а A — только от r^2 ($r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$) и где

$$A = \frac{1}{1 + \frac{\zeta}{4}r^2}, \tag{I.3}$$

различные случаи характеризуются значениями $\zeta = 1$, $\zeta = -1$ и $\zeta = 0$ соответственно.

§ 3. Уравнения поля

Мы должны теперь удовлетворить уравнениям поля тяготения, т. е. уравнениям поля без «космологического члена», введенного нами ранее *ad hoc*:

$$\left(R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R\right) + \varkappa T_{ik} = 0. \tag{I.4}$$

Подставляя выражение для метрики, основанное на предположении о пространственной изотропии, мы получаем после вычисления:

$$\left.\begin{aligned} R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R &= \left(\frac{\zeta}{G^2} + \frac{G'^2}{G^2} + 2\frac{G''}{G}\right)GA\delta_{ik} \\ &\qquad\qquad (i,\, k = 1,\, 2,\, 3) \\ R_{44} - \frac{1}{2}g_{44}R &= -3\left(\frac{\zeta}{G^2} + \frac{G'^2}{G^2}\right) \\ R_{i4} - \frac{1}{2}g_{i4}R &= 0 \qquad\qquad (i = 1,\, 2,\, 3) \end{aligned}\right\}. \tag{I.4a}$$

Далее тензор энергии «пылевидного» вещества записывается в виде

$$T^{ik} = \rho \frac{dx_i}{ds}\frac{dx_k}{ds}. \tag{I.4б}$$

Геодезические, вдоль которых движется вещество, представляют собой линии, на которых меняется только x_4; на них $dx_4 = ds$. Для единственной отличной от нуля компоненты мы получаем

$$T^{44} = \rho. \tag{I.4в}$$

Опуская индексы, мы получаем единственную не равную нулю компоненту T_{ik}

$$T_{44} = \rho. \tag{I.4г}$$

С учетом этого уравнения поля приводятся к виду

$$\left.\begin{aligned} \frac{\zeta}{G^2} + \frac{G'^2}{G^2} + 2\frac{G''}{G} = 0 \\ \frac{\zeta}{G^2} + \frac{G'^2}{G^2} - \frac{1}{3}\varkappa\rho = 0 \end{aligned}\right\}, \tag{I.5}$$

где ζ/G^2 равно кривизне в пространственном сечении $x_4 = \text{const}$. Так как G во всех случаях является относительной мерой метрического расстояния между двумя материальными точками как функции времени, то G'/G описывает хэббловское расширение. А из уравнений выпадает, как это и должно быть, если решения уравнений гравитации имеют требуемую симметрию. Вычитая одно уравнение из другого, получаем

$$\frac{G'}{G} + \frac{1}{6}\varkappa\rho = 0. \tag{I.5а}$$

Так как G и ρ должны быть всюду положительны, G'' везде отрицательна для ρ, отличных от нуля. Поэтому $G(x_4)$ не может иметь ни минимума, ни точки перегиба; кроме того, не существует решения, при котором G было бы постоянно.

§ 4. Случай нулевой пространственной кривизны ($\zeta = 0$)

Простейшим случаем не равной нулю плотности ρ является случай $\zeta = 0$, когда сечения $x_4 = \text{const}$ не искривлены. Если мы положим $G'/G = h$, то уравнения поля для этого случая запишутся в виде

$$\left.\begin{aligned} 2h' + 3h^2 &= 0 \\ 3h^2 &= \varkappa\rho \end{aligned}\right\}. \qquad (\text{I}.5\text{б})$$

Содержащееся во втором уравнении соотношение между постоянной Хэббла h и средней плотностью ρ может быть, по крайней мере по порядку величины, сравнено с экспериментальным. Скорость расширения равна 432 *км/сек* на расстоянии 10^6 *парсек*[5]. Если перевести это число в используемую нами систему единиц (единица длины — 1 *см*, единица времени — время прохождения лучом света расстояния в 1 *см*), то мы получаем

$$h = \frac{432 \cdot 10^5}{3,25 \cdot 10^6 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60} \left(\frac{1}{3 \cdot 10^{10}}\right)^2 = \\ = 4,71 \cdot 10^{-28} см^{-1}.$$

Поскольку, далее (см. формулу (105а)), $\varkappa = 1,86 \cdot 10^{-27}$, то второе из уравнений (5б) дает

$$\rho = \frac{3h^2}{\varkappa} = 3,5 \cdot 10^{-28} г/см^3.$$

Это значение по порядку величины согласуется с оценками астрономов (сделанными на основании масс и параллаксов видимых звезд и звездных систем). В качестве примера я цитирую здесь Мак-Витти[6]: «Средняя плотность наверняка не превыша-

[5]По новым данным эта постоянная равна $\sim$75 *км/сек* на 10^6 *парсек* или $0,8 \cdot 10^{-28}$ $см^{-1}$ и соответственно плотность, отвечающая случаю нулевой кривизны, стала равна $\sim 2 \cdot 10^{-29}$ $г/см^3$. — *Прим. ред.*

[6]G. C. M c V i t t i e. Proc. Phys. Soc., 1939, **51**, 537.

ет 10^{-27} г/см^3, а наиболее вероятное ее значение — порядка 10^{-29} г/см^3».

Вследствие больших трудностей определения этой величины такое согласие для настоящего времени нам представляется удовлетворительным. Поскольку величина h определена с большей точностью, чем ρ, по-видимому, не будет преувеличением утверждать, что определение структуры наблюдаемого нами пространства всецело зависит от более точного определения ρ. Действительно, согласно второму из уравнений (I.5), пространственная кривизна в общем случае равна

$$\zeta G^{-2} = \frac{1}{3}\varkappa\rho - h^2. \tag{I.5в}$$

Отсюда следует, что если правая часть этого уравнения положительна, то пространство имеет положительную кривизну; ее величина может быть определена с точностью, с которой известна эта разность. Если правая часть отрицательна, пространство бесконечно. В настоящее время точность определения ρ недостаточна, чтобы из этого соотношения можно было заключить о том, что средняя кривизна пространства (сечение $x_4 = \mathrm{const}$) отлична от нуля.

В случае, когда мы пренебрегаем пространственной кривизной, первое из уравнений (I.5в) после соответствующего выбора начала отсчета x_4 принимает вид

$$h = \frac{2}{3}\frac{1}{x_4}. \tag{I.6}$$

Это уравнение имеет особенность при $x_4 = 0$, так что такое пространство либо сжимается и время ограничено сверху величиной $x_4 = 0$, либо оно расширяется и возникает в момент $x_4 = 0$. Последний случай отвечает тому, что реализуется в природе.

Из измеренной величины h мы получаем для продолжительности существования мира величину $1,5 \cdot 10^9$ лет[7]. Этот возраст почти совпадает с возрас-

[7]По современным данным —$13 \cdot 10^{10}$ лет, так что никакого парадокса не возникает. — *Прим. ред.*

том земной коры, получаемым из данных о распаде урана. Этот парадоксальный результат по многим причинам вызвал сомнения в справедливости теории.

Возникает вопрос: может ли эта трудность, возникшая из предположения о практически пренебрежимой пространственной кривизне, быть обойдена введением соответствующей пространственной кривизны? В связи с этим следует обратиться к первому из уравнений (I.5), которое определяет временную зависимость G.

§ 5. Решение уравнений в случае неравной нулю пространственной кривизны

Для исследования пространственной кривизны пространственного сечения ($x_4 = \text{const}$) необходимо обратиться к уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} \zeta G^{-2} + \left[2\frac{G''}{G} + \left(\frac{G'}{G}\right)^2\right] = 0 \\ \zeta G^{-2} + \left(\frac{G'}{G}\right)^2 - \frac{1}{3}\varkappa\rho = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{I.5}$$

Кривизна положительна, если $\zeta = +1$, и отрицательна, если $\zeta = -1$. Первое из этих уравнений можно проинтегрировать. Сначала запишем его в следующей форме:

$$\zeta + 2GG'' + G'^2 = 0. \tag{I.5г}$$

Рассматривая $x_4 (= t)$ как функцию G, можем написать

$$G' = \frac{1}{t'}; \quad G'' = \left(\frac{1}{t'}\right)'\frac{1}{t'}.$$

Обозначив $1/t'$ через $u(G)$, получим

$$\zeta + 2Guu' + u^2 = 0 \tag{I.5д}$$

или

$$\zeta + (Gu^2)' = 0. \tag{I.5е}$$

Отсюда простым интегрированием получаем

$$\zeta G + Gu^2 = G_0, \tag{I.5ж}$$

или, так как $u = 1/(dt/dG) = dG/dt$,

$$\left(\frac{dG}{dt}\right)^2 = \frac{G_0 - \zeta G}{G}, \tag{I.5з}$$

где G_0 — постоянная. Эта постоянная не может быть отрицательной, что становится очевидным, если мы продифференцируем (I.5з) и учтем, что G'' в соответствии с (I.5а) отрицательно.

а) *Пространство положительной кривизны.* G все время остается в интервале $0 \leqslant G \leqslant G_0$. Вид функции G схематически приведен на рис. 1. Радиус G возрастает от 0 до G_0 и затем опять постепенно уменьшается до нуля. Пространственное сечение конечно (сферической формы):

$$\frac{1}{3}\varkappa\rho - h^2 > 0. \tag{I.5в}$$

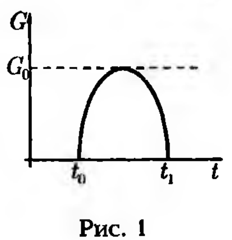


Рис. 1

Рис. 2

б) *Пространство отрицательной кривизны.*

$$\left(\frac{dG}{dt}\right)^2 = \frac{G_0 + G}{G}.$$

G растет с течением времени от $G = 0$ до $G = +\infty$ (или убывает от $G = \infty$ до $G = 0$). Следовательно,

$\frac{dG}{dt}$ — монотонно уменьшается от $+\infty$ до 1, как это изображено на рис. 2. Таким образом, этот случай отвечает непрерывному расширению без сжатия. Пространственное сечение бесконечно и мы имеем

$$\frac{1}{3}\varkappa\rho - h^2 < 0. \tag{I.5в}$$

Случай плоского пространственного сечения, рассматривавшийся в предыдущем параграфе, является, согласно уравнению (I.5з), промежуточным между этими случаями:

$$\left(\frac{dG}{dt}\right)^2 = \frac{G_0}{G}. \tag{I.5з}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Случай отрицательной кривизны содержит в качестве предельного случай $\rho = 0$. Для этого случая $\left(\frac{dG}{dt}\right)^2 = 1$ (см. рис. 2). Поскольку тензор кривизны, как показывают вычисления, обращается при этом в нуль, это — случай евклидовой метрики.

Случай отрицательной кривизны с отличной от нуля плотностью ρ приближается к этому предельному случаю все ближе и ближе, так что с течением времени структура пространства все в меньшей и меньшей степени определяется содержащейся в нем материей.

Из приведенного исследования случая не равной нулю кривизны вытекают следующие выводы. В случае произвольной не равной нулю («пространственной») кривизны, так же как и в случае нулевой кривизны, существует начальное состояние с $G = 0$, соответствующее началу расширения. В этом сечении, следовательно, плотность бесконечна и поле имеет сингулярность. Введение такого рода сингулярности проблематично уже само по себе[8].

[8]Необходимо, однако, заметить следующее: существующая релятивистская теория гравитации основывается на разделении понятий «гравитационного поля» и «материи». Поэтому возможно, что эта теория неверна при очень больших плотностях материи, и в единой теории никакой сингулярности не появится.

Далее оказывается, что введение пространственной кривизны почти не влияет на интервал времени между началом расширения и моментом достижения некоего фиксированного значения $h = G'/G$. Этот промежуток времени можно получить из (I.5з) с помощью элементарных вычислений, которых мы здесь не приводим. Ограничимся рассмотрением случая расширяющегося пространства с равным нулю ρ. Как отмечалось ранее, это является частным случаем отрицательной пространственной кривизны. Из второго уравнения (I.5) мы получаем (учитывая обратный знак первого члена)

$$G' = 1.$$

Следовательно (при соответствующем выборе начала отсчета),

$$G = x_4, \qquad h = \frac{G'}{G} = \frac{1}{x_4}. \tag{I.6a}$$

Таким образом, этот предельный случай дает для продолжительности расширения с точностью до множителя порядка 1 тот же самый результат, что и случай равной нулю пространственной кривизны [см. соотношение (I.6)].

Поэтому введение пространственной кривизны не устраняет трудности, о которой говорилось в связи с соотношением (I.6), а именно то, что отводится слишком короткое время на развитие наблюдаемых в настоящее время звезд и звездных систем.

§ 6. Распространение метода на случай более общего состояния вещества

Во всех полученных до сих пор решениях существует состояние системы с сингулярной метрикой ($G = 0$) и бесконечной плотностью ρ. Возникает вопрос: не связано ли возникновение сингулярности с тем, что мы рассматриваем вещество в виде облака пыли, которое никак не противодействует конденсации. Не пренебрегли ли мы без всякого на то основания влиянием хаотического движения отдельных звезд?

Можно, например, заменить облако пыли, в котором частицы покоятся друг относительно друга, облаком, частицы которого хаотически движутся друг относительно друга наподобие молекул газа. Такое облако будет сопротивляться адиабатической конденсации, и сопротивление будет возрастать с ростом конденсации. Не будет ли это препятствовать безграничной конденсации? Ниже мы покажем, что такое изменение в описании вещества не изменяет основных черт полученных выше решений.

§ 7. «Газ частиц», рассматриваемый согласно специальной теории относительности

Рассмотрим рой параллельно движущихся частиц массы m. Сделав надлежащее преобразование, мы можем рассматривать этот рой покоящимся. Пространственная плотность частиц σ тогда инвариантна в смысле специальной теории относительности. По отношению к произвольной лоренцовой системе тензор

$$T^{uv} = m\sigma \frac{dx^u}{ds}\frac{dx^v}{ds} \tag{I.7}$$

имеет одинаковый смысл (тензор энергии роя). Если таких роев много, то суммированием получаем

$$T^{uv} = m\sum_p \sigma_p \left(\frac{dx^u}{ds}\right)_p \left(\frac{dx^v}{ds}\right)_p. \tag{I.7a}$$

Мы можем выбрать ось времени лоренцовой системы координат так, чтобы выполнялось условие

$T^{14} = T^{24} = T^{34} = 0$. Кроме того, с помощью пространственного вращения можно получить $T^{12} = T^{23} = T^{31} = 0$. Пусть, далее, газ частиц является изотропным. Это означает, что $T^{11} = T^{22} = T^{33} = p$. Эти компоненты, равно как и $T^{44} = u$, — инварианты. Таким образом, инвариант

$$\mathfrak{J} = T^{uv}g_{uv} = T^{44} - (T^{11} + T^{22} + T^{33}) = u - 3p \quad \text{(I.7б)}$$

выражается через u и p.

Из выражения для T^{uv} следует, что T^{11}, T^{22}, T^{33} и T^{44} положительны; то же самое, следовательно, справедливо и для T_{11}, T_{22}, T_{33} и T_{44}.

Уравнения гравитации записываются теперь в виде

$$\left.\begin{aligned} 1 + 3GG' + G^2 + \varkappa T_{11} = 0 \\ -3G^{-2}(1 + G'^2) + \varkappa T_{44} = 0 \end{aligned}\right\}. \quad \text{(I.8)}$$

Из первого уравнения следует, что и здесь (так как $T_{11} > 0$) G'' всегда отрицательна, причем член с T_{11} при данных G и G' может только уменьшить величину G''.

Отсюда мы видим, что учет хаотического движения частиц друг относительно друга не меняет существенно наших результатов.

§ 8. Резюме и некоторые замечания

1. Введение в уравнения гравитации «космологического члена» хотя и возможно с точки зрения теории относительности, но не является необходимым логически. Как впервые показал Фридман, конечную всюду плотность материи можно согласовать с первоначальной формой уравнений гравитации, если допустить, что метрическое расстояние между двумя материальными точками меняется со временем[9].

---

[9]Если бы хэббловское расширение было открыто во время создания общей теории относительности, космологический член

2. Одно уже требование *пространственной* изотропии Вселенной приводит к схеме Фридмана. Не вызывает поэтому никаких сомнений, что это наиболее общая схема, дающая решение космологической проблемы.

3. Пренебрегая влиянием пространственной кривизны, можно получить соотношение между средней плотностью и хэббловским расширением, которое, по порядку величины, подтверждается на опыте.

Для промежутка времени между началом расширения и настоящим временем получается значение порядка 109 лет. Малая величина этого времени не согласуется с теориями эволюции неподвижных звезд.

4. Последний результат не меняется с введением пространственной кривизны; на него не влияет также учет хаотического движения звезд и звездных систем друг относительно друга.

5. Делались попытки объяснить хэббловское смещение спектральных линий при помощи механизма, отличного от допплер-эффекта. Известные физические факты, однако, не подтверждают такое объяснение. Согласно этим гипотезам, можно было бы две звезды S_1 и S_2 соединить твердым стержнем. Монохроматический свет, посланный из S_1 в S_2 и отраженный обратно к S_1, мог бы вернуться с другой частотой (измеренной с помощью часов на S_1, если число длин волн вдоль стержня по пути менялось бы со временем. Это означало бы, что измеренная в локальной системе координат скорость света зависит от времени — результат, противоречащий даже специальной теории относительности. Далее, следует заметить, что световой сигнал, распространяющийся между S_1 и S_2, являлся бы «часами», не находящимися в постоянной связи с ча-

---

никогда бы не был введен. Его введение в уравнения поля сейчас кажется столь необоснованным потому, что исчезло его единственное оправдание, состоявшее в том, что с его помощью получалось естественное решение космологической проблемы.

сами (например, атомными) на S_1. Это означало бы отсутствие метрики в смысле теории относительности, но такая точка зрения не согласуется и с тем фактом, что в некоторых атомных явлениях проявляется не только «подобие», но и «конгруэнтность» (существование резких спектральных линий, атомных объемов и т. д.).

Приведенные выше рассуждения основаны, впрочем, на волновой теории, и некоторые сторонники упоминавшихся гипотез могут рассматривать процесс изменения частоты света не по волновой теории, а наподобие эффекта Комптона. Предположение о существовании такого процесса без рассеяния представляет собой гипотезу, которая ничем не обоснована с точки зрения современных данных. При этом не удается также объяснить независимость относительного смещения частоты от самой частоты. Поэтому открытое Хэбблом явление нельзя рассматривать иначе, как расширение звездной системы.

6. Предположение о том, что «начало мира» (начало расширения) было всего около 109 лет назад, вызывает сомнения как с экспериментальной, так и с теоретической точек зрения. Астрономы склоняются к тому, чтобы рассматривать звезды различных спектральных типов как звезды различных возрастных классов в едином процессе развития. Такой процесс требует гораздо больше времени, чем 10^9 лет, и поэтому эти представления противоречат полученным выше следствиям релятивистских уравнений. Мне кажется, однако, что «теория эволюции» звезд основывается на менее прочном фундаменте, чем уравнения поля.

Теоретические сомнения основываются на том, что в момент, соответствующий началу расширения, метрика сингулярна и плотность ρ бесконечна. В связи с этим следует заметить следующее: современная теория относительности основана на разделении физической реальности на метрическое поле (гравитацию), с одной стороны, и на электромагнитное поле и вещество — с другой. В действительности пространство, вероятно, должно быть единым по своему характеру, и современную теорию следует рассматривать лишь как некий предельный случай. При больших плотностях поля и вещества уравнения поля и даже входящие в них переменные должны терять смысл. Поэтому мы не можем предположить, что уравнения поля остаются справедливыми при больших плотностях поля и материи, и не можем заключить, что «начало расширения» должно означать сингулярность в математическом смысле. Поэтому мы должны иметь в виду, что, может быть, и нельзя распространять уравнения на такие области.

Эти соображения, однако, не меняют вывода, что, с точки зрения развития ныне существующих звезд и звездных систем, «начало мира» действительно соответствует некоторому началу, когда эти звезды и звездные системы еще не существовали как отдельные образования.

7. Однако имеются некоторые наблюдательные данные, говорящие *в пользу* требуемой теорией динамической картины пространства. Почему уран до сих пор существует, несмотря на сравнительно быстрый его распад и несмотря на то, что пока не найдено возможностей его вторичного образования? Почему пространство не заполнено излучением настолько, чтобы сделать ночное небо похожим на раскаленную поверхность? Это старый вопрос, до сих пор еще не нашедший удовлетворительного объяснения с точки зрения стационарной модели Вселенной. Но разбор этих вопросов завел бы нас слишком далеко.

8. Приведенные соображения позволяют думать, что, несмотря на короткое «время жизни», идею расширяющейся Вселенной следует рассматривать серьезно. В этом случае главным становится вопрос, имеет ли пространство положительную или отрицательную кривизну. В связи с этим заметим следующее.

С точки зрения эксперимента, ответ зависит от того, положительно ли выражение $\frac{1}{3}\varkappa\rho - h^2$ (сферический случай) или отрицательно (псевдосферический случай). Это представляется мне наиболее важным вопросом. Экспериментальное его решение при современном состоянии астрономии не представляется невозможным. Поскольку h (постоянная Хэббла) сравнительно хорошо известна, все зависит от возможно более точного определения ρ.

Можно представить себе, что будет доказана сферичность мира (трудно представить себе, что может быть дано доказательство псевдосферичности мира). Это связано с тем, что всегда можно дать нижнюю границу для ρ, но отнюдь не верхнюю. Причина этого кроется в трудности оценки той части ρ, которая связана с астрономически ненаблюдаемой (неизлучающей) материей. Этот вопрос мы разберем более подробно.

Нижнюю границу для ρ ($\rho_в$) можно определить, учитывая массы только светящихся звезд. Если окажется, что $\rho_в > 3h^2/\varkappa$, то вопрос будет решен в пользу сферического пространства. Если же окажется, что $\rho_в < 3h^2/\varkappa$, то необходимо определить долю неизлучающей материи ρ_d. Мы постараемся показать, что можно определить нижнюю границу для $\rho_d/\rho_в$.

Рассмотрим астрономический объект, состоящий из большого количества звезд, который с достаточной точностью можно рассматривать как стационарную систему; это может быть, например, шаровое скопление (с известным параллаксом). Из спектроскопически наблюдаемых скоростей можно (при правдоподобных предположениях) определить поле гравитации, а тем самым и массу, которая создает это поле. Вычисленную таким путем массу можно сравнить с массой видимых звезд скопления и найти по крайней мере грубую оценку того, насколько создающие поле массы превышают массу видимых звезд нашего скопления. Таким образом можно оценить $\rho_d/\rho_в$ для каждого звездного скопления.

Так как неизлучающие звезды в среднем меньше излучающих, то вследствие их взаимодействия со звездами скопления они в среднем обладают большими скоростями, чем более крупные звезды. Следовательно, они будут «испаряться» из звездного скопления быстрее, чем более тяжелые звезды. Поэтому следует ожидать, что относительное количество малых небесных тел внутри звездного скопления будет меньше, чем вне его. Следовательно, мы получаем, что $(\rho_d/\rho_s)_k$ (отношение плотностей внутри звездного скопления) дает нижнюю границу отношения ρ_d/ρ_s для всего пространства. Поэтому для нижней границы полной средней плотности в пространстве мы получаем значение

$$\rho_s\left[1 + \left(\frac{\rho_d}{\rho_s}\right)\right].$$

Если эта величина больше, чем $3h^2/\varkappa$, то мы можем заключить, что пространство имеет сферический характер. Что же касается верхней границы ρ, то я не вижу реальных путей для ее определения.

9. Последний, но не менее важный вопрос. Возраст Вселенной в принятом нами смысле наверняка должен превышать возраст земной коры, определяемый из данных о радиоактивных минералах. Поскольку определение возраста по этим минералам со всех точек зрения является достоверным, то предложенная здесь космологическая теория будет опровергнута, если обнаружится, что она противоречит полученным таким методом результатам. В этом случае я не вижу никакого разумного решения.

Приложение II к четвертому изданию

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ[1]

Содержание изложенной выше общей теории относительности формально выражается уравнением

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = T_{ik}. \qquad \text{(II.1)}$$

Левая часть этого уравнения зависит только от симметричного тензора g_{ik}, описывающего как метрические свойства пространства, так и гравитационное поле. Правая часть уравнения (II.1) феноменологически описывает все источники гравитационного поля. Тензор T_{ik} представляет энергию, которая создает гравитационное поле, но сама не имеет гравитационного характера, как, например, энергия электромагнитного поля, энергия, связанная с плотностью вещества и т. д. При составлении тензора T_{ik}, были использованы представления дорелятивистской физики, который только a posteriori были согласованы с общим принципом относительности.

Такой дуалистической трактовки единого поля нельзя было избежать на первой стадии разви-

---

[1] *Generalization of Theory of Gravitation.* The Meaning of Relativity, fourth edition. Prinston, 1953. (Приложение II появилось впервые во 2-м издании «Сущности теории относительности». Для 4-го издания оно было переработано. — *Прим. ред.*).

тия теории относительности. Было, однако, очевидно, что это только предварительный подход к проблеме. Отправной точкой теории явилось установление единства тяготения и инерции (принцип эквивалентности). Из этого принципа и из установленного факта, что свет определенным образом ведет себя в «пустом пространстве», следовало, что свойства последнего описываются симметричным тензором g_{ik}. Однако принцип эквивалентности не позволяет ответить на вопрос о том, каков наиболее общий математический аппарат, на котором следует строить теорию единого поля, охватывающего всю физическую реальность. В этом случае наши познания в области физики не позволяют сделать однозначного выбора, подобного тому, который следовал из эквивалентности инерции и тяготения для частного случая чисто гравитационного поля. Единственным указанием, которое можно извлечь из опыта, является смутное ощущение, что полное поле должно включать в себя нечто подобное электромагнитному полю Максвелла.

В результате попытка последовательного обобщения общей теории относительности ведет к явно туманной формулировке проблемы: найти структуру поля, являющуюся естественным обобщением симметричного тензора, и отыскать систему уравнений поля этой структуры, которые представляли бы естественное обобщение уравнений чистой гравитации

$$R_{ik} = 0. \tag{II.2}$$

Сейчас я попытаюсь дать решение этой проблемы, которое кажется мне в высшей степени убедительным, хотя вследствие математических трудностей еще не найдено практического пути для сравнения результатов теории с экспериментальными данными.

§ 1. Структура поля

Первая проблема заключается в следующем: каков естественный путь обобщения структуры поля? Что является естественным обобщением симметричного тензора g_{ik}?

Решение, сразу же приходящее в голову, заключается в замене симметричного тензора поля несимметричным. Именно такая структура поля кладется в основу излагаемой ниже теории.

Легко понять, почему этот путь, кажущийся на первый взгляд таким естественным, до последнего времени никогда серьезно не рассматривался. Если разложить тензор g_{ik} на его симметричную и антисимметричную части ($g_{\underline{ik}}$ и $g_{\underset{\vee}{ik}}$ соответственно) согласно уравнению

$$g_{ik} = g_{\underline{ik}} + g_{\underset{\vee}{ik}}, \tag{II.3}$$

то мы увидим, что каждая из этих двух частей сама по себе является тензором, т. е. при преобразовании координат компоненты каждой из частей преобразуются независимо от компонент другой части. Другими словами, несимметричный тензор g_{ik}, с точки зрения лоренцовой группы, не является неприводимым, а представляет собой произвольную и необоснованную комбинацию двух величин различной природы.

Это должно казаться веским возражением. Следует заметить, однако, что теоретико-групповые соображения отнюдь не являются единственным критерием для суждения о «единообразии» концепции несимметричного тензора поля. Действительно, в теории симметричного тензорного поля (теория Римана) очень важную роль играет определитель, составленный из g_{ik}. В частности, с его помощью становится возможным связать контравариантный тензор g^{ik} с ковариантным тензором g_{ik} согласно соотношению

$$g_{is}\, g^{it} = \delta^t_s = g_{si}\, g^{ti}, \tag{II.4}$$

где δ^t_s — тензор Кронекера. Эта связь, играющая фундаментальную роль в теории симметричного поля, может быть немедленно перенесена на случай несимметричного поля; в последнем случае, однако, необходимо сохранить порядок индексов. Это указывает на то, что, несмотря на приведенное выше возражение, введение несимметричного тензорного поля является естественным обобщением симметричного поля. Соотношение (II.4) позволяет поднимать и опускать индексы у тензора; однако в случае несимметричного поля эта операция уже не является однозначно определенной априори ($A_s g^{sk}$ и $A_s g^{sk}$ не равны друг другу), даже если задан «фундаментальный тензор».

§ 2. Аффинное смещение и абсолютное дифференцирование в случае несимметричного поля

Понятие бесконечно малого параллельного переноса вектора

$$\delta A^i = -\Gamma^i_{st} A^s \, dx^t, \tag{II.5а}$$

$$\delta A_i = \Gamma^s_{it} A_s \, dx^t, \tag{II.5б}$$

может быть немедленно распространено и на нашу обобщенную теорию. При этом приходится, однако, считать, что Γ несимметричен по двум нижним индексам, так что нужно постулировать разумное соотношение между g_{ik} и Γ^l_{ik}.

Из (II.5а) и (II.5б) следует, что[2]

$$A^i_{,k} + A^s \Gamma^i_{sk}, \tag{II.6а}$$

$$A_{i,k} - A_s \Gamma^s_{ik} \tag{II.6б}$$

[2] В дальнейшем запятая будет всегда означать частное дифференцирование например, $A^i_{,k} \equiv \dfrac{\partial A^i}{\partial x^k}$.

имеют тензорный характер, так же как и в случае симметричного Γ^l_{ik}. Из определений (5), аналогично случаю симметричного Г, вытекает закон преобразования величин Γ^l_{ik}

$$\Gamma^{l*}_{ik} = \frac{\partial x^{l*}}{\partial x^t}\frac{\partial x^r}{\partial x^{i*}}\frac{\partial x^s}{\partial x^{k*}}\Gamma^t_{rs} - \frac{\partial^2 x^{l*}}{\partial x^a\,\partial x^b}\frac{\partial x^a}{\partial x^{i*}}\frac{\partial x^b}{\partial x^{k*}}. \qquad (\text{II}.7)$$

Разлагая Γ^l_{ik} соответственно симметрии нижних индексов на

$$\Gamma^l_{ik} = \Gamma^l_{\underline{ik}} + \Gamma^l_{\underset{\vee}{ik}}, \qquad (\text{II}.8)$$

легко показать, что получаемые две величины преобразуются независимо друг от друга. Переставляя в (II.6б) индексы i и k и вычитая полученный таким образом тензор из (II.6б), мы получаем тензор

$$(A_{i,k} - A_{k,i}) - A_s(\Gamma^s_{ik} - \Gamma^s_{ki}).$$

Выражение в первой скобке имеет тензорный характер; поэтому то же должно быть справедливо для $A_s\gamma^s_{\underset{\vee}{ik}}$, а следовательно, и для $\Gamma^s_{\underset{\vee}{ik}}$. Тогда из (II.6б) следует, что

$$A_{i,k} - A_s\Gamma^s_{\underline{ik}}$$

также является тензором. Следовательно, $\Gamma^s_{\underline{ik}}$ само является (симметричным) полем смещений.

С теоретико-групповой точки зрения, Γ^l_{ik} не является однородным образованием, так как с помощью разложения (II.8) его можно разбить на симметричное поле смещений $\Gamma^l_{\underline{ik}}$ и на антисимметричный тензор $\Gamma^l_{\underset{\vee}{ik}}$ — аддитивную добавку, на первый взгляд кажущуюся нежелательной. Однако мы сейчас увидим, что, так же как и в аналогичном случае несимметричного тензора g_{ik}, это возражение не имеет решающего значения.

Если ввести определение

$$\widetilde{\Gamma}^l_{ik} = \Gamma^l_{ki}, \qquad (\text{II}.9)$$

то из (II.9) следует, что

$$\widetilde{\Gamma}^l_{ik} = \Gamma^l_{\underline{ik}} + (-\Gamma^l_{\overset{\vee}{ik}}).$$

Из формулы преобразования (II.7) мы видим, что $\widetilde{\Gamma}^l_{ik}$ также является полем смещений. Транспонируя g_{ik}, можно таким же образом, конечно, построить и тензор $\widetilde{g}_{ik} = g_{ki}$. В дальнейшем окажется важным рассматривать g, Γ и транспонированные величины $\widetilde{g}$ и $\widetilde{\Gamma}$ совместно.

Поскольку наряду со смещением Γ возможно смещение $\widetilde{\Gamma}$, то, согласно формулам (II.6а) и (II.6б), имеются две различные возможности абсолютного дифференцирования, которые следует рассматривать отдельно. Соответственно этому мы вводим следующие определения:

$$\left.\begin{aligned} A^{\overset{i}{+}}_{;k} &= A^i_{,k} + A^s\Gamma^i_{sk} \\ A^{\overset{i}{-}}_{;k} &= A^i_{,k} + A^s\Gamma^i_{ks} \end{aligned}\right\}, \qquad \text{(II.10а)}$$

$$\left.\begin{aligned} A_{\underset{+}{i;}k} &= A_{i,k} - A_s\Gamma^s_{ik} \\ A_{\underset{-}{i;}k} &= A_{i,k} - A_s\Gamma^s_{ki} \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(II.10б)}$$

Далее, так как иногда оказывается, что ковариантные производные содержат симметризованное Γ, то мы определим еще

$$A^{\overset{i}{0}}_{;k} = A^i_{,k} + A^s\Gamma^i_{\underline{sk}}, \qquad \text{(II.11а)}$$

$$A_{\underset{0}{i;}k} = A_{i,k} - A^s\Gamma^s_{\underline{ik}}. \qquad \text{(II.11б)}$$

При абсолютном дифференцировании, так же как и в случае симметричного Γ, выполняются правила произведений и сумм, из которых, в частности, следуют правила дифференцирования тензоров более высокого ранга.

Следует обратить внимание на следующее обстоятельство, не имеющее аналога в случае симметричного Г: ковариантная производная тензора Кронекера δ_i^k обращается в нуль только в случаях

$$\delta^{\overset{k}{+}}_{\underset{+}{i};l};\quad \delta^{\overset{k}{-}}_{\underset{-}{i};l};\quad \delta^{\overset{k}{0}}_{\underset{0}{i};l}.$$

тогда как, например,

$$\delta^{\overset{k}{-}}_{\underset{+}{i};l} = 0 + \delta_i^s\Gamma^k_{ls} - \delta_s^k\Gamma^s_{il} = 2\Gamma^k_{\underset{\vee}{li}} \neq 0.$$

Свертывание индексов под знаком дифференцирования (без добавления поправочных членов) по этой причине возможно, только если соответствующие индексы имеют один и тот же характер по отношению к дифференцированию. Так, например,

$$A^{\overset{i}{+}}_{\underset{+}{k}\ldots;l}\delta_i^k = A^s_{s\ldots;l}$$

Абсолютное дифференцирование тензорных плотностей

Величина

$$g_{\underset{+-}{ik};l}\left(= g_{ik,l} - g_{sk}\Gamma^s_{il} - g_{is}\Gamma^s_{lk}\right) \tag{II.12}$$

является тензором. Умножая на g^{ik} и свертывая по индексам i и k, мы получаем, согласно правилу дифференцирования определителей, вектор

$$\frac{w_{,l}}{w} - \Gamma^s_{\underline{ls}}, \tag{II.13}$$

где w означает $\sqrt{-\mathrm{Det}\,(g_{ik})}$ а w — скалярную плотность (ранга 1). Кроме того, если ρ — произвольная скалярная плотность (ранга 1), то ρ/w, а следовательно, и $\ln(\rho/w)$ являются скалярными величинами. Дифференцируя по x_l, получаем вектор

$$\frac{\rho_{,l}}{\rho}-\frac{w_{,l}}{w}. \tag{II.14}$$

Складывая векторы (II.13) и (II.14), получаем вектор

$$\frac{\rho_{,l}}{\rho}-\Gamma^{s}_{\underline{ls}}.$$

Умножение его на ρ дает векторную плотность

$$\rho_{,l}-\rho\Gamma^{s}_{\underline{ls}}.$$

Это выражение мы будем рассматривать как определение ковариантной производной $\rho_{;l}$ скалярной плотности ρ

$$\rho_{;l}=\rho_{,l}-\rho\Gamma^{s}_{\underline{ls}}. \tag{II.15}$$

Из этого определения, в частности, вытекает следующее тождество для скалярной плотности w:

$$\left(\frac{w_{;l}}{w}\right)_{,m}-\left(\frac{w_{;m}}{w}\right)_{,l}\equiv\Gamma^{s}_{\underline{ls},m}-\Gamma^{s}_{\underline{ms},l}. \tag{II.16}$$

Используя (II.15) и правило абсолютного дифференцирования произведений, мы можем уже знакомым путем распространить понятие абсолютного дифференцирования на тензорные плотности. Так, например,

$$(\rho A^{\overset{i}{+}})_{;k}=\rho_{;k}A^{i}+\rho A^{i}_{;k}$$

или, обозначая векторную плотность ρA^i через $\mathfrak{A}^i$,

$$\mathfrak{A}^{\overset{i}{+}}_{;k}=(\rho_{,k}-\rho\Gamma^{s}_{\underline{ks}})A^{i}+\rho(A^{i}_{,k}+A^{s}\Gamma^{i}_{sk}),$$

что можно записать в виде

$$\mathfrak{A}^{\overset{i}{+}}_{;k}=\mathfrak{A}^{i}_{,k}+\mathfrak{A}^{s}\Gamma^{i}_{sk}-\mathfrak{A}^{i}\Gamma^{s}_{\underline{ks}}. \tag{II.17}$$

Последний член отличает ковариантную производную векторной плотности от ковариантной производной вектора. Аналогичный результат получается и при абсолютном дифференцировании тензорных плотностей более высокого ранга. Свертывая (II.17), получаем

$$\mathfrak{A}^{\overset{t}{+}}_{;t} = \mathfrak{A}^t_{,t} + \mathfrak{A}^t \Gamma_t, \tag{II.18}$$

где мы ввели обозначение $\Gamma_t = \Gamma^s_{\underset{\vee}{ts}}$. Таким же образом получаем

$$\mathfrak{A}^{\overset{t}{-}}_{;t} = \mathfrak{A}^t_{,t} + \mathfrak{A}^t \Gamma_t. \tag{II.19}$$

Тождества для метрического тензора

Выведем теперь несколько тождеств, которые окажутся полезными, в дальнейшем. Так же как и в предыдущем разделе, умножим тензор $g_{\underset{+-}{ik};l}$ на g^{ik} и свернем полученное выражение по i и k. Используя определение $w_{;l}$, можем написать

$$g^{ik} g_{\underset{+-}{ik};l} \equiv 2w_{;l}. \tag{II.20}$$

Умножим, далее $g_{\underset{+-}{ik};l}$ на $g^{il}g^{sk}$ и произведем свертку. Это дает (учитывая, что $g^{sk}g_{ik,l} = -g^{sk}_{,l}g_{ik}$)

$$g^{il}g^{sk}g_{\underset{+-}{ik};l} \equiv -g^{st}_{,l} - g^{it}\Gamma^s_{il} - g^{sk}\Gamma^t_{lk} \equiv -g^{\overset{st}{+-}}_{;l}. \tag{II.21}$$

Определим, наконец, $\mathfrak{g}^{ik}$ как $\mathfrak{g}^{ik} = wg^{ik}$. Для этой тензорной плотности выполняется соотношение

$$\mathfrak{g}^{\overset{ik}{+-}}_{;l} = \mathfrak{g}^{ik}_{,l} + \mathfrak{g}^{sk}\Gamma^i_{sl} + \mathfrak{g}^{is}\Gamma^k_{ls} - \mathfrak{g}^{ik}\Gamma^s_{\underline{ls}}.$$

Антисимметризуя по индексам i и k и свертывая по k и l, получаем важное тождество

$$\frac{1}{2}\left(\mathfrak{g}^{it}_{;t} - \mathfrak{g}^{ti}_{;t}\right) \equiv \mathfrak{g}^{\underset{\vee}{it}}_{,t} - \mathfrak{g}^{\underline{it}}\Gamma_t. \tag{II.22}$$

Риманова кривизна

Точно так же как и в случае симметричной теории, тензор кривизны можно получить путем параллельного переноса вектора вдоль границы бесконечно малого элемента поверхности

$$R^i_{klm} = (\Gamma^i_{kl,m} - \Gamma^i_{sl}\Gamma^s_{km}) - (\Gamma^i_{km,l} - \Gamma^i_{sm}\Gamma^s_{kl}). \qquad \text{(II.23)}$$

Другой тензор этого же типа получается при замене Γ^i_{kl} на $\widetilde{\Gamma}^i_{kl} (= \Gamma^i_{lk})$.

Свертывая (II.23) по i и m, получаем в результате тензор

$$R_{kl} = (\Gamma^t_{kl,t} - \Gamma^t_{sl}\Gamma^s_{kt}) - (\Gamma^t_{kt,l} - \Gamma^s_{kl}). \qquad \text{(II.24)}$$

§ 3. Вывод уравнений поля

Чтобы получить совместную систему уравнений, ограничимся случаем, когда система уравнений может быть выведена из вариационного принципа. Это гарантирует совместность уравнений.

В качестве наиболее общего подынтегрального выражения для нашего вариационного принципа мы выберем скалярную плотность $\mathfrak{H}$, построенную из $\mathfrak{g}^{ik}$, Γ^l_{ik} и их первых производных. Из вариационного принципа следует

$$\delta \int \mathfrak{H}\, d\tau = 0, \qquad \text{(II.25)}$$

где $\mathfrak{g}^{ik}$ и Γ^l_{ik} должны варьироваться независимо друг от друга. Мы можем так выбрать $\delta\mathfrak{g}$ и $\delta\Gamma$, чтобы на границах области интегрирования они обращались в нуль. Тогда, производя интегрирования по частям, можно переписать (II.25) в следующей форме:

$$\int (\mathfrak{B}^{ik}_l \delta\Gamma^l_{ik} + W_{ik}\delta\mathfrak{g}^{ik})\, d\tau = 0. \qquad \text{(II.25a)}$$

Так как $\delta\mathfrak{g}$ и $\delta\Gamma$ независимы, коэффициенты при них должны обращаться в нуль, и мы получаем уравнения поля

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{B}_l^{ik} &= 0 \\ W_{ik} &= 0 \end{aligned}\right\}. \tag{I}$$

Посмотрим, что получится, если варьировать интеграл (II.25) при дополнительном условии

$$\mathfrak{g}^{\underset{\vee}{is}}_{,s} = 0. \tag{II.26}$$

Введение априори этого соотношения между компонентами $\mathfrak{g}^{ik}$ означает, что $\delta\mathfrak{g}^{ik}$ не являются уже независимыми. Чтобы учесть это, мы можем, например, использовать метод неопределенных множителей Лагранжа. Тогда после интегрирования по частям находим

$$\int \left(\mathfrak{B}_l^{ik}\delta\Gamma_{ik}^l + [W_{ik} + \sigma_{i,k} - \sigma_{k,i}]\delta\mathfrak{g}^{ik}\right) d\tau = 0,$$

где σ_i — векторное поле множителей Лагранжа, которое позволяет нам теперь рассматривать $\delta\mathfrak{g}^{ik}$ как независимые переменные. Таким образом, мы приходим к уравнениям

$$\mathfrak{B}_l^{ik} = 0; \quad \mathfrak{g}^{\underset{\vee}{is}}_{,s} = 0; \quad W_{ik} + (\sigma_{i,k} - \sigma_{k,i}) = 0,$$

или, исключая вспомогательные переменные σ_i,

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{B}_l^{ik} = 0; \quad \mathfrak{g}^{\underset{\vee}{is}}_{,s} = 0 \\ &W_{\underline{ik}} = 0; \quad W_{\underline{ik},l} + W_{\underset{\vee}{kl},i} + W_{\underset{\vee}{li},k} = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{II.II}$$

Система уравнений (II.II) отличается от системы (I) тем, что шесть уравнений системы (I) $W_{\underset{\vee}{ik}}$ заменены в ней восемью уравнениями

$$\mathfrak{g}^{\underset{\vee}{is}}_{,s} = 0; \quad W_{\underset{\vee}{ik},l} + W_{\underset{\vee}{kl},i} + W_{\underset{\vee}{li},k} = 0.$$

Левые части этих восьми уравнений удовлетворяют двум тождествам

$$\left(\mathfrak{g}^{\underset{\vee}{is}}{}_{,s}\right)_{,i} \equiv 0$$

и

$$\left(W_{\underset{\vee}{ik},l} + W_{\underset{\vee}{kl},i} + W_{\underset{\vee}{li},k}\right)_{,m}\eta^{iklm} \equiv 0$$

(η^{iklm} — антисимметричная по всем четырем индексам тензорная плотность Леви-Чивиты).

Кажется очевидным (и это будет строго доказано ниже, см. стр. 171), что при любом выборе тензорной плотности $\mathfrak{H}$ для вариационного принципа эти восемь уравнений и два тождества более жестко определяют переменные поля, чем шесть уравнений системы (I). В качестве физической теории я склонен предпочесть более «жесткую» систему (II.II) системе (I). Такой принцип предпочтения более жестких систем более слабым представляется мне имеющим всеобщую применимость.

Тождества Бианки

В чисто гравитационной теории мы знаем четыре тождества Бианки. Следуя Вейлю, их можно получить из вариационного принципа, используя инвариантность по отношению к группе преобразований координат. Та же самая процедура может быть проделана и в несимметричной теории.

Предположим, что $\delta\Gamma^l_{ik}$ и $\delta\mathfrak{g}^{ik}$ возникли в результате бесконечно малого преобразования координат. Тогда получаем[3]

$$\delta\Gamma^l_{ik} = \Gamma^s_{ik}\xi^l_{,s} - \Gamma^l_{sk}\xi^s_{,i} - \Gamma^l_{is}\xi^s_{,k} - \xi^l_{,ik} - \Gamma^l_{ik,s}\xi^s,$$

[3]Последний член в каждой строке появляется вследствие того, что варьируемые величины должны браться при фиксированных значениях координат.

Подставляя эти выражения в варьируемый интеграл $\delta\int\mathfrak{H}\,d\tau = 0$ и выполняя необходимые интегрирования по частям, мы можем привести интеграл к следующему виду

$$\int \mathfrak{M}_i\xi^i\,d\tau = 0, \tag{II.27}$$

откуда следуют четыре тождества Бианки

$$\mathfrak{M}_i \equiv 0. \tag{II.28}$$

Конкретное содержание этих тождеств зависит, конечно, от выбора $\mathfrak{H}$ в вариационном принципе. Однако даже не делая этого выбора, мы можем видеть, как тождества (II.28) связывают уравнения поля, следующие из общего вариационного принципа $\delta\int\mathfrak{H}\,d\tau = 0$. Действительно, если мы подставим $\delta\Gamma^l_{ik}$ и $\delta\mathfrak{g}^{ik}$ в (II.25a) и приведем его к виду (II.27), то увидим, что $\mathfrak{M}_i$ линейно зависят от $\mathfrak{B}^{ik}_l$, W_{ik} и их первых производных, так что если удовлетворяются уравнения поля (I), то (II.28) представляют собой тождественные соотношения между этими уравнениями поля. То же самое справедливо и в случае системы (II.II), но, чтобы увидеть это, необходимо выделить симметричную и антисимметричную части W_{ik}, входящие в $\mathfrak{M}_i$. Вклад W_{ik} в $\mathfrak{M}_i$ равен

$$\begin{aligned}\left[-2(W_{\underline{si}}\mathfrak{g}^{\underline{st}})_{,t} + W_{\underline{sk},i}\mathfrak{g}^{sk}\right] + \mathfrak{g}^{sk}\left[W_{\underset{\vee}{ki},s}+\right.\\ \left.+W_{\underset{\vee}{is},k} + W_{\underset{\vee}{sk},i}\right] + \left[-W_{\underset{\vee}{ik}}\mathfrak{g}^{tk}_{,t} + W_{\underset{\vee}{ik}}\mathfrak{g}^{kt}_{,t}\right].\end{aligned}$$

Последняя скобка как раз равна $2W_{\underset{\vee}{sk}}\mathfrak{g}^{\overset{kt}{\vee}}_{,t}$, $(=0$, согласно (II.26)), Таким образом, мы видим, что и в случае системы (II.II) $\mathfrak{M}_i$ являются линейными комбинациями уравнений поля.

Выбор гамильтониана $\mathfrak{H}$

Вопрос о выборе тензорной плотности $\mathfrak{H}$ для вариационного принципа пока оставался открытым.

До сих пор ничего не говорилось о виде $\mathfrak{H}$. Чтобы сделать какой-то выбор, наложим следующее условие на вариационный принцип: из него должно следовать (по возможности) наиболее простое соотношение между g и Γ, а именно:

$$g_{\underset{+-}{ik};l} = 0. \qquad \text{(II.29)}$$

Условие (II.29) является обобщением соотношения в симметричной теории. Это условие обладает свойством инвариантности относительно транспонирования (которое, конечно, не имеет смысла в симметричной теории); это означает, что уравнения остаются справедливыми при замене

$$g_{ik} \text{ на } \tilde{g}_{ik}(\equiv g_{ki}) \text{ и } \Gamma^i_{kl} \text{ на } \tilde{\Gamma}^i_{kl}(\equiv \Gamma^i_{lk}).$$

Это является математическим выражением того факта, что для теории безразличен знак заряда электричества.

Плотность $\mathfrak{H}$, удовлетворяющая поставленному выше условию, может быть действительно найдена. Начнем с рассмотрения свернутого тензора кривизны

$$R_{ik} = [\Gamma^s_{ik,s} - \Gamma^t_{is}\Gamma^s_{tk}] - [\Gamma^s_{is,k} - \Gamma^t_{ik}\Gamma^s_{\underline{ts}}]. \qquad \text{(II.24)}$$

Сначала прибавим к R_{ik} тензор $\Gamma_{\underset{+}{i};k} = \Gamma^s_{\underset{\vee}{is},k} - \Gamma^t_{ik}\Gamma^s_{\underset{\vee}{ts}}$; при этом R_{ik} заменится на

$$R^*_{ik} = [\Gamma^s_{ik,s} - \Gamma^t_{is}\Gamma^s_{tk}] - [\Gamma^s_{\underline{is},k} - \Gamma^t_{ik}\Gamma^s_{ts}].$$

Для выражения во второй скобке мы используем теперь уравнение, определяющее абсолютное дифференцирование скалярной плотности,

$$w_{;t} = w_{,t} = w\Gamma^s_{\underline{ts}}. \qquad \text{(II.15)}$$

После перегруппировки членов это дает

$$R^*_{ik} = [\Gamma^s_{ik,s} - \Gamma^t_{is}\Gamma^s_{tk}] - \left[\left(\frac{w_{,i}}{w}\right)_{,k} - \left(\frac{w_{,t}}{w}\right)\Gamma^t_{ik}\right] + \\ + \left[\left(\frac{w_{;i}}{w}\right)_{,k} - \left(\frac{w_{;t}}{w}\right)\Gamma^t_{ik}\right].$$

Последняя скобка равна просто тензору $\left[(1/w)w_{,\underset{+}{i}}\right]_{;k}$. Вычитая этот тензор из R^{*}_{ik}, получаем

$$R^{**}_{ik} = \Gamma^{s}_{ik,s} - \Gamma^{t}_{is}\Gamma^{s}_{tk} - (\ln w)_{,ik} + (\ln w)_{,t}\Gamma^{t}_{ik}. \tag{II.24a}$$

По построению R^{**}_{ik} является тензором и, действительно, мы сейчас проверим, что плотность $\mathfrak{g}^{ik}R^{**}_{ik}$ может быть использована для нашего вариационного принципа и дает при этом нужный нам результат. Проварьируем интеграл $\int \mathfrak{g}^{ik}R^{**}_{ik}\,d\tau$ сначала по Γ (когда дополнительное условие $\mathfrak{g}^{\overset{is}{\vee}}_{,s} = 0$ не играет роли). Мы получим уравнение

$$\mathfrak{g}^{ik}_{,l} + \mathfrak{g}^{tk}\Gamma^{i}_{tl} + \mathfrak{g}^{il}\Gamma^{k}_{lt} - \mathfrak{g}^{ik}(\ln w)_{,l} = 0. \tag{II.30}$$

Заменяя $\mathfrak{g}^{ik}$ на wg^{ik} и деля все уравнения на w, находим

$$0 = g^{il}_{,l} + g^{tk}\Gamma^{i}_{tl} + g^{it}\Gamma^{k}_{lt} = g^{\overset{ik}{+-}}_{;l}, \tag{II.30a}$$

что, согласно тождествам (II.20) и (II.21), приводит к нужному результату

$$g_{\underset{+-}{ik};l} = 0; \quad \mathfrak{g}^{\overset{ik}{+-}}_{;l} = 0; \quad w_{;l} = 0.$$

Поскольку у нас есть теперь уравнения $\mathfrak{g}^{\overset{ik}{+-}}_{;l} = 0$ и $g^{\overset{is}{\vee}}_{,s}$, то из тождества (II.22) видно, что выполняются также соотношения

$$\Gamma_{i} = 0. \tag{II.31}$$

Отсюда, далее, вытекает, что R^{**}_{ik} оказывается теперь равным R_{ik}, так как разность между этими двумя тензорами сводится к величине

$$\Gamma_{\underset{+}{ik}} - \left(\frac{1}{w}w_{;\underset{+}{l}}\right)_{;k},$$

которая равна нулю.

Нам осталось получить остальные уравнения. Найдем их, варьируя $\int \mathfrak{g}^{ik} R^{**}_{ik}\, d\tau$ по $\mathfrak{g}^{ik}$.

После интегрирования по частям имеем

$$0 = \int \left[R^{**}_{ik}\delta\mathfrak{g}^{ik} - \left\{\mathfrak{g}^{ik}_{,ik} + (\mathfrak{g}^{ik}\Gamma^{t}_{ik})_{,t}\right\}\delta(\ln w)\right] d\tau.$$

Но коэффициент при $\delta(\ln w)$ обращается в нуль, поскольку он может быть записан в виде

$$\left\{\mathfrak{g}^{ik}_{,i} + \mathfrak{g}^{it}\Gamma^{k}_{it}\right\}_{,k} = \left\{\mathfrak{g}^{ik}_{;i}\right\}_{,k} = 0.$$

Поэтому у нас остается

$$\int R^{**}_{ik}\delta\mathfrak{g}^{ik}\, d\tau = 0.$$

Вариации $\delta\mathfrak{g}^{ik}$ не являются независимыми вследствие условия $\mathfrak{g}^{i\underset{\vee}{s}}_{,s} = 0$, и мы используем, как это уже делалось выше, метод неопределенных множителей Лагранжа. В результате получаются уравнения (мы можем теперь писать R_{ik} вместо R^{**}_{ik}):

$$R_{\underline{ik}} = 0, \quad R_{\underset{\vee}{ik},l} + R_{\underset{\vee}{kl},i} + R_{\underset{\vee}{li},k} = 0.$$

Выписывая полную систему уравнений, мы замечаем, что в силу тождества (II.22) уравнения $\mathfrak{g}^{\overset{ik}{+-}}_{;l} = 0$ и $\Gamma_i = 0$ вместе эквивалентны уравнениям $\mathfrak{g}^{\overset{ik}{+-}}_{;l} = 0$ и $\mathfrak{g}^{i\underset{\vee}{s}}_{,s} = 0$. Поэтому нашу систему можно выбрать в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{g}^{\underset{+-}{ik}}{}_{;l} = 0; & \Gamma_i &= 0\\ &R_{\underline{ik}} = 0; \quad & R_{\underset{\vee}{ik},l} + R_{\underset{\vee}{kl},i} + R_{\underset{\vee}{li},k} &= 0 \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(II.IIa)}$$

Эта система уравнений обладает свойством инвариантности относительно транспонирования; это непосредственно видно для уравнений $\mathfrak{g}_{\underset{+-}{ik};l} = 0$

и $\Gamma_i = 0$. Для двух других инвариантность легко проверить, заменяя R_{ik} на R^{**}_{ik}.

Мы должны теперь выяснить, можно ли выбрать какое-нибудь другое выражение для $\mathfrak{H}$, которое также приводило бы к уравнению $\mathfrak{g}^{ik}_{\underset{+-}{}\,;l} = 0$. Предположим, что мы нашли такую плотность $\mathfrak{H}^*$, причем $\mathfrak{H}^* = \mathfrak{H} + \mathfrak{K}$. Если $\mathfrak{K}$ зависит от Г, то оно дает свой вклад при варьировании по Г. С другой стороны, чтобы выполнялось уравнение $\mathfrak{g}^{ik}_{\underset{+-}{}\,;l} = 0$, этот вклад должен тождественно обращаться в нуль. Мы можем без доказательства принять, что это означает, что $\mathfrak{K}$ не может зависеть от Г. Остается возможность, что $\mathfrak{K}$ построено только из g_{ik}, как, например, w или $wg^{ik}g_{ik}$, и т.д. (Первая из этих возможностей ведет к так называемому «космологическому члену».) Все такие дополнительные члены внесли бы неоднородность в систему уравнений и их следует отбросить, если только не будут найдены веские физические аргументы в их пользу.

Замечания относительно физической интерпретации системы уравнений. При физической интерпретации теории на первый план выступает вопрос: в какой степени имеется сходство между этой теорией и теорией Максвелла? Есть формальное сходство между линейным приближением к этой теории и уравнениями Максвелла. Можно показать, что в линейном приближении система распадается на две системы уравнений: одну для симметричных компонент поля и другую — для антисимметричных компонент. Уравнения для антисимметричной части являются обобщением уравнений Максвелла для пустого пространства. Расщепление уравнений в линейном приближении делает понятным, почему электромагнитное и гравитационное поля казались независимыми на начальной стадии развития наших теоретических идей. Дело в том, что эти идеи основывались исключительно на известных нам данных о поведении слабых полей.

В строгой теории такой независимости уже нет. Во всяком случае, сходство с теорией Максвелла не очень близкое; в частности, локализация энергии оказывается совершенно другой. Однако имеются и следующие общие черты.

Вид уравнения $\mathfrak{g}^{\underset{\vee}{is}}_{,s} = 0$ наводит на мысль, что его можно интерпретировать как условие обращения в нуль магнитного тока. Кроме того, величины

$$g_{\underset{\vee}{ik},l} + g_{\underset{\vee}{kl},i} + g_{\underset{\vee}{li},k}$$

или соответствующую векторную плотность

$$\mathfrak{J}^m = \frac{1}{6}(g_{\underset{\vee}{ik},l} + g_{\underset{\vee}{kl},i} + g_{\underset{\vee}{li},k})\eta^{iklm}$$

можно интерпретировать как плотность электрического тока, так как эти величины тождественно удовлетворяют «уравнению непрерывности»

$$\mathfrak{J}^m_{,m} = 0.$$

Другой вывод уравнений поля

Приведенный выше вывод уравнений поля, в котором использовался вспомогательный тензор R^{**}_{ik}, имеет некоторые преимущества. Вариация по Γ непосредственно дает уравнение $g_{\underset{+-}{ik};l} = 0$. Кроме того, когда мы в уравнениях заменяем R_{ik} на R^{**}_{ik}, сразу становится очевидной инвариантность относительно транспонирования.

Однако, с другой стороны, этот вывод имеет и свои недостатки, так как R^{**}_{ik} вводится искусственным путем; кроме того, этот вывод позволяет допустить, что с тем же основанием можно выбрать антисимметричную часть поля ($g_{\underset{\vee}{ik}}$ и $\Gamma^l_{\underset{\vee}{ik}}$) чисто мнимой. Поэтому мы считаем нужным коротко упомянуть о другом выводе, свободном от указанных недостатков.

Сопоставим каждому полю Γ^l_{ik} семейство полей Γ^{l+}_{ik}, связанных друг с другом соотношением

$$\Gamma^{l+}_{ik} = \Gamma^l_{ik} + \delta^l_i \lambda_k \quad \text{(«}\lambda\text{-преобразование»)},$$

где λ_k — произвольное векторное поле[4]. Нетрудно показать, что совокупность преобразований координат и λ-преобразований образует группу («расширенная группа»). Возникает вопрос, можно ли найти вариационный принцип (опять с априорным условием $g^{\underset{\vee}{is}}{}_{,s} = 0$), инвариантный относительно расширенной группы.

Применяя λ-преобразование к R_{ik}, получаем

$$R^{+}{}_{ik} = R_{ik} - (\lambda_{i,k} - \lambda_{k,i}).$$

Тензорная плотность $\mathfrak{H} = \mathfrak{g}^{ik} R_{ik}$ преобразуется поэтому следующим образом:

$$(\mathfrak{g}^{ik} R^{+}{}_{ik} =) \mathfrak{H}^{+} = \mathfrak{H} - \mathfrak{g}^{ik}(\lambda_{i,k} - \lambda_{k,i}) = \mathfrak{H} + 2\mathfrak{g}^{\underset{\vee}{ik}} \lambda_{k,i}.$$

Пользуясь условием $0 = \mathfrak{g}^{\underset{\vee}{is}}{}_{,s}$, мы можем переписать это в виде

$$\mathfrak{H}^{+} = \mathfrak{H} + 2(\mathfrak{g}^{\underset{\vee}{ik}} \lambda_k)_{,i}.$$

Второй член при интегрировании дает поверхностный интеграл и поэтому ничего не вносит при варьировании. Отсюда следует, что вариационный принцип

$$\delta\left\{\int \mathfrak{H}\, d\tau\right\} = 0$$

и вытекающие из него уравнения инвариантны относительно λ-преобразований.

---

[4]Это преобразование, очевидно, «смешивает» симметричную и антисимметричную части Г-поля, так что $\Gamma^{i}_{\underset{\vee}{kl}}$ не может быть при этом выбрано мнимым.

Можно показать, что вариация по Г приводит к уравнению

$$-\mathfrak{g}^{\overset{ik}{+-}}_{;l} + \mathfrak{g}^{\overset{it}{+-}}_{;t}\,\delta^k_l + \mathfrak{g}^{ik}\Gamma_l + \mathfrak{g}^{it}\Gamma_t\delta^k_l = 0.$$

Отсюда вытекает, что $\mathfrak{g}^{\overset{\cdot}{+-}}_{;l};= 0$, если выполняется условие $\Gamma_i = 0$. Но этого можно добиться (благодаря λ-инвариантности вариационного принципа) соответствующим выбором λ_k («нормировка» Г-поля).

Таким образом, мы приходим к тем же уравнениям, что и при использовании первого метода. При этом, однако, существенно, что Γ^l_{ik} вещественны, а $\Gamma^l_{\underset{\vee}{ik}}$ уже не имеют инвариантного смысла при преобразованиях расширенной группы. Если мы опять потребуем, чтобы выполнялось уравнение $g_{\underset{+-}{i}\,;l} = 0$, то с помощью тех же рассуждений, как и раньше (стр. 154), мы увидим, что в функцию Гамильтона нельзя ввести никаких добавочных членов.

§ 4. Общие замечания относительно «жесткости» системы уравнений. Применение к теории несимметричного поля

В предыдущем параграфе (стр. 149) мы из двух систем уравнений (I) и (II.II) отдали предпочтение второй. Принцип, которому мы при этом следовали, имеет всеобщую применимость к физическим теориям: систему уравнений следует выбирать так, чтобы полевые величины определялись этой системой *как можно более жестким образом.*

Чтобы применять этот принцип, нам нужен метод, который позволял бы дать меру жесткости системы уравнений. Поступим следующим образом: разложим переменные поля вблизи точки P в ряд Тэйлора (предполагается аналитический характер поля). Коэффициенты разложения, которые представляют собой не что иное, как производные переменных поля в точке P, распадаются на группы соответственно порядку дифференцирования. В каждом порядке дифференцирования мы на первых порах получаем набор коэффициентов, которые можно было бы выбрать произвольно, если бы поле не должно было удовлетворять системе уравнений. Благодаря наличию системы дифференциальных уравнений (и уравнений, получаемых из них путем дифференцирования по координатам) число независимых коэффициентов уменьшается, так что в каждой группе уже меньшее число коэффициентов может быть выбрано произвольно. Количество «свободных» коэффициентов в каждой группе непосредственно дает меру «слабости» системы уравнений и, таким образом, определяет и «жесткость» системы.

Этот метод подсчета числа свободных коэффициентов в каждом порядке дифференцирования предполагает, что число их можно вычислять последовательно порядок за порядком. Мы можем также ограничиться случаем, когда все эти числа положительны, т.е. когда уравнения для коэффициентов одного порядка не накладывают добавочных условий на коэффициенты предыдущих порядков. В таком случае мы будем говорить, что система уравнений «абсолютно совместна». Все системы уравнений, применявшиеся до сих пор в теоретической физике, по-видимому, имеют такой характер.

Проиллюстрируем этот метод несколькими примерами. Волновое уравнение в пространстве четырех измерений имеет вид

$$0 = \Box\varphi = \varphi_{,1,1} + \varphi_{,2,2} + \varphi_{,3,3} - \varphi_{,4,4}.$$

Система уравнений в этом случае состоит из одного уравнения для одной функции φ. В окрестности какой-либо точки, например $x_i = 0$, φ разлагается в степенной ряд следующего вида:

$$\varphi = c + (c_i\, x_i) + (c_{ik}\, x_i\, x_k) + \ldots$$

Таким образом, φ будет определено, если мы зададим значения коэффициентов c для всех членов разложения (т. е. производные φ в точке $x_i = 0$. Количество коэффициентов на каждой последовательной ступени вычислений приведено в следующей таблице:

Порядок	Число коэффициентов
0	1
1	$4 = \binom{4}{1}$
2	$\frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = \binom{4}{2}$
3	$\frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \binom{4}{3}$
...	....
n	$\frac{4 \cdot 5 \ldots (n+3)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} = \binom{4}{n}$

Количество этих коэффициентов уменьшается вследствие условий, вытекающих из дифференциального уравнения. Эти условия получаются при учете дифференциального уравнения и всех уравнений, получаемых путем последовательного дифференцирования исходного уравнения, в точке $x_i = 0$.

Порядок	Число коэффициентов
0	0
1	0
2	1
3	$\binom{4}{1}$
...	......
n	$\binom{4}{n-2}$

Вычитая из числа коэффициентов данного порядка соответствующее число условий, получим число коэффициентов данного порядка Ω_n, остающихся произвольными. Для числа свободных коэффициентов степени $n(> 2)$ находим

$$\Omega_n = \binom{4}{n} - \binom{4}{n-2},$$

или

$$\Omega_n = \binom{4}{n}\left(1 - \frac{n}{n+3}\frac{n-1}{n+2}\right) =$$

$$= \binom{4}{n}\left(1 - \frac{1}{1+\frac{3}{n}}\frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}\right).$$

При больших n это равенство можно заменить на

$$\Omega_n \sim \binom{4}{n}\frac{6}{n}.$$

Множитель $6/n$ дает ту часть общего числа коэффициентов (порядка $n \gg 1$), которые остаются не определенными дифференциальным уравнением. Величина Ω_n, таким образом, является мерой жесткости, с которой дифференциальное уравнение определяет поле. Будучи положительным, число Ω_n характеризует эту систему как «абсолютно совместную».

Эти же соображения можно без всякого изменения перенести на более сложное уравнение

$$A_{ik}\,\varphi_{,ik} + B = 0,$$

где A_{ik} и B — известные функции φ и $\varphi_{,s}$. Продифференцировав это уравнение $(n-2)$ раз в точке $x_i = 0$, найдем, что n-я производная от φ входит в выражение линейно, тогда как производные низших степеней входят более сложным образом. При меньшем числе дифференцирований n-я производная от φ вообще не появляется. Это позволяет последовательно проводить дифференцирование различных порядков. Схема, показывающая число условий, которые следуют из дифференциальных уравнений, дает в правом столбце число уравнений, в которых порядок дифференцирования, указанный в левом столбце, появляется в первый раз (и появляется линейно).

Главная трудность, возникающая при применении намеченного выше метода к системам, состоящим более чем из одного дифференциального уравнения, заключается в правильном учете тождества между уравнениями. Мы покажем, как это делается на примере уравнений Максвелла для вакуума.

Уравнения Максвелла для пустого пространства

Запишем уравнения Максвелла в форме Минковского (с мнимой временной координатой):

$$(V_i \equiv)\, \varphi_{is,s} = 0,$$
$$(V_{ikl} \equiv)\, \varphi_{ik,l} + \varphi_{kl,i} + \varphi_{li,k} = 0,$$

где φ_{ik} — (антисимметричный) тензор электромагнитного поля. Эти уравнения удовлетворяют тождествам

$$U_{i,i} = 0,$$
$$V_{ikl,m}\eta^{iklm} = 0.$$

Поскольку φ_{ik} имеет шесть компонент, число коэффициентов разложения в ряд Тэйлора на n-м этапе равно $6\binom{4}{n}$. Эти коэффициенты связаны между собой алгебраическими уравнениями, получаемыми при $(n-1)$-кратном дифференцировании уравнений поля. Число этих условий (алгебраических уравнений) равно

$$4\binom{4}{n-1} + 4\binom{4}{n-1}.$$

Однако вследствие существования тождеств эти условия не независимы, Действительно, между коэффициентами n-го этапа существуют соотношения, выполняющиеся тождественно, как это следует из $(n-2)$-кратного дифференцирования выписанных выше тождеств. Число таких тождественных соотношений между коэффициентами равно

$$\binom{4}{n-2} + \binom{4}{n-2}.$$

Число *независимых* соотношений между коэффициентами n-го этапа, следовательно, равно

$$8\binom{4}{n-1}-2\binom{4}{n-2}.$$

Вычитая это число из (полного) числа $6\binom{4}{n}$ коэффициентов на n-м этапе, мы получаем число Ω_n коэффициентов, остающихся неопределенными на n-м этапе:

$$\Omega_n=6\binom{4}{n}-\left[8\binom{4}{n-1}-2\binom{4}{n-2}\right].$$

В этом месте удобно использовать асимптотическое выражение ($n\gg 1$)

$$\binom{4}{n-r}\sim\binom{4}{n}\left(1-\frac{3r}{n}\right)\quad (r\ll n).$$

Отсюда следует, что

$$\Omega_n\sim\binom{4}{n}\left[6-8\left(1-\frac{3}{n}\right)+2\left(1-\frac{6}{n}\right)\right],$$

или

$$\omega_n\sim\binom{4}{n}\frac{12}{n}.$$

Мы видим, что на n-м этапе здесь остается вдвое больше свободных коэффициентов, чем в случае скалярного волнового уравнения.

Прежде чем оставить этот пример, остановимся на одном пункте, который необходим как для понимания используемого здесь метода, так и для формального понимания этой конкретной системы уравнений.

Если в выписанные выше уравнения введем вектор-потенциал ψ_i, определяемый соотношением

$$\varphi_{ik}=\psi_{i,k}-\psi_{k,i},$$

то увидим, что второе уравнение выполняется автоматически, в то время как первое дает

$$(W_i \equiv)\, \psi_{i,s,s} - \psi_{s,s,i} = 0.$$

Это система четырех уравнений для четырех компонент ψ_i, причем между ними имеется одно тождество $W_{i,i} \equiv 0$. Таким образом, эти уравнения неоднозначно определяют векторное поле ψ_i, из которого мы обратно можем получить первоначальную систему уравнений. Как известно, для однозначного определения ψ_i-поля необходимо дополнить эту (промежуточную) систему уравнением $\psi_{,s} = 0$. При этом получается система

$$(A_i \equiv)\, \psi_{i,s,s} = 0,$$
$$(B \equiv)\, \psi_{s,s} = 0.$$

Приведенное выше тождество принимает форму

$$A_{i,i} - B_{s,s} \equiv 0.$$

Эта система включает в себя промежуточную систему, а с ней и первоначальную систему уравнений для φ_{ik}. Следовательно, эта система определяет φ_{ik} с той же самой жесткостью, что и первоначальная система; представляется интересным вычислить также жесткость, с которой определяются ψ_i. Метод подсчета коэффициентов n-го порядка дает в этом случае

$$\Omega_n = 4\binom{4}{n} - \left[4\binom{4}{n-2} + \binom{4}{n-1} - \binom{4}{n-3}\right],$$

или, асимптотически,

$$\Omega_n \sim \binom{4}{n}\left(\frac{24}{n} + \frac{3}{n} - \frac{9}{n}\right) = \binom{4}{n}\frac{18}{n}.$$

Сравнение с результатами, относящимися к первоначальной системе уравнений, показывает, что

ψ_i-поле определяется менее жестко, чем φ_{ik}-поле. С этой точки зрения, следует отдать предпочтение первоначальной форме уравнений Максвелла, если нет причин приписывать независимый физический смысл переменным ψ_i. Причиной разной жесткости этих двух систем уравнений является то, что, даже зная полностью φ_{ik}, мы не можем однозначно определить ψ_i. Сейчас мы разберем это подробно, так как этот случай позволяет проиллюстрировать, как при подсчете учесть «тождества между тождествами». Пусть φ_{ik} заданы, а ψ_i удовлетворяет уравнениям

$$(C_{ik} \equiv)\, \psi_{i,k} - \psi_{k,i} = \varphi_{i,k},$$
$$(B \equiv)\, \psi_{s,s} = 0$$

(где заданные φ_{ik} удовлетворяют уравнению $\varphi_{ik,l} + \varphi_{kl,i} + \varphi_{li,k} = 0$). Первое из этих уравнений удовлетворяет тождеству

$$(D_{ikl} \equiv)\, C_{ik,l} + C_{kl,i} + C_{li,k} \equiv 0.$$

Однако эти четыре тождества не независимы друг от друга, поскольку сами D_{ikl} удовлетворяют тождеству

$$D_{ikl,m}\eta^{iklm} \equiv 0,$$

выполняющемуся при любых (антисимметричных) C_{ik}. Это тождество между компонентами D_{ikl} меняет на каждом этапе результат подсчета коэффициентов. Не проводя доказательства, приведем лишь результат

$$\Omega_n = 4\binom{4}{n} - \left[\left\{6\binom{4}{n-1} + \binom{4}{n-1}\right\} - \left\{4\binom{4}{n-2} - \binom{4}{n-3}\right\}\right].$$

Первый член в правой части равен полному числу коэффициентов на n-м этапе дифференцирования;

член в квадратных скобках дает число условий, накладываемых уравнениями на коэффициенты. Внутри квадратной скобки выражение в первой фигурной скобке равно числу условий, вытекающих из первоначальных уравнений, без учета тождеств. Вторая фигурная скобка связана с наличием тождеств первого и второго рода.

Вычисление приводит к следующему асимптотическому выражению для Ω_n:

$$\Omega_n \sim \binom{4}{n}\left(\frac{18}{n}+\frac{3}{n}-\frac{24}{n}+\frac{9}{n}\right) \sim \binom{4}{n}\frac{6}{n}.$$

Здесь мы видим отражение того произвола, с которым определяются ψ_i при заданных φ_{ik}; численно эта степень произвола согласуется с полученными ранее результатами относительно

$$\varphi_{ik} \text{ и } \psi_i\left(\frac{6}{n}=\frac{18}{n}-\frac{12}{n}\right).$$

В дальнейшем мы будем рассматривать системы общековариантных уравнений. Здесь необходимо сделать замечания о числе коэффициентов в таких системах для каждого порядка. Пусть в число переменных поля входит и тензор g_{ik}. Тогда число возникающих из g_{ik} коэффициентов n-го порядка будет равно $16\binom{4}{n}$. Однако не все эти коэффициенты имеют объективный смысл, так как они изменяются при преобразовании координат. О фактическом множестве действительно различных полей можно судить, подсчитывая число независимых коэффициентов в полностью определенной системе координат.

Из законов преобразования следует, что в конечной области координаты можно выбрать так, что g_{14}, g_{24}, g_{34} обращаются в нуль, а $g_{44} = \pm 1$. Остающиеся компоненты $g_{ik}(g_{11}, \ldots, g_{33})$ в общем случае зависят тогда от $x_1, \ldots, x_4$. На гиперповерхности $x_4 = 0$ они являются функциями x_1, x_2, x_3.

Поэтому можно сделать дальнейшее преобразование координат так, чтобы на этой гиперповерхности $x_4 = 0$ мы имели $g_{13} = g_{23} = 0$, $g_{33} = \pm 1$. Эту же процедуру можно повторить в подпространстве $x_4 = x_3 = 0$, при этом получим $g_{12} = 0$, $g_{22=\pm 1}$ и, наконец, в подпространстве $x_4 = x_3 = x_2 = 0$, так чтобы получить $g_{11=\pm 1}$. Это — наиболее жесткое ограничение на компоненты тензора, которого можно добиться путем выбора системы координат. В результате общее число $16\binom{4}{n}$ коэффициентов в ряде Тэйлора уменьшится на

$$4\binom{4}{n}+3\binom{3}{n}+2\binom{2}{n}+1=D_n$$

коэффициентов. Общее g_{ik}-поле имеет поэтому на n-м этапе на D_n меньше коэффициентов, чем получилось бы без учета его ковариантных свойств. Для больших значений n мы находим[5]

$$D_n \sim \binom{4}{n}\left(4+\frac{9}{n}\right).$$

Применение метода к системе уравнений симметричного поля (чисто гравитационное поле)

Полное поле состоит из симметричных полей g_{ik} и Γ^l_{ik}. Будем считать, что оба поля разложены в степенные ряды вблизи начала координат. Структура уравнений

$$0 = g_{ik;l} = g_{ik,l} - g_{sk}\Gamma^s_{il} - g_{is}\Gamma^s_{lk}$$

такова, что на каждом этапе дифференцирования g_{ik} дифференцируется на один раз больше, чем Γ. По этой причине в разложении

$$\Gamma = \underset{0}{\Gamma} + \underset{1}{\Gamma_s} x_s + \underset{2}{\Gamma_{st}} x_s x_t + \ldots$$

[5] Эта формула, как показано самим автором, ошибочна. См. ниже, стр. 177. — *Прим. ред.*

мы будем рассматривать $\underset{0}{\Gamma}$ как величину первого порядка, $\underset{1}{\Gamma}$ — второго порядка и т. д. Благодаря этому получим, что в уравнениях, определяющих коэффициенты разложения, высшие порядки входящих в них коэффициентов g и Γ одинаковы. Уравнения для R_{ik} не вносят затруднений, так как в них g вообще не входит.

Среди членов n-й степени в разложении поля мы имеем

$$10\binom{4}{n} \text{ коэффициентов для } g_{ik}\text{-поля,}$$

$$40\binom{4}{n-1} \text{ коэффициентов для } \Gamma\text{-поля.}$$

Чтобы скомпенсировать последствия произвола в выборе системы координат, из этого числа следует вычесть число D_n.

Продифференцированные $(n-1)$ раз уравнения $g_{ik;l}=0$ дают для коэффициентов соотношения, в которых высший порядок коэффициентов равен n. Число таких уравнений, получаемых дифференцированием, равно

$$40\binom{4}{n-1}.$$

Продифференцированные $(n-2)$ раза уравнения $R_{ik}=0$ дают

$$10\binom{4}{n-2}$$

уравнений для коэффициентов n-й степени.

Однако мы должны еще учесть существование четырех тождеств Бианки, благодаря которым уравнения для коэффициентов не являются независимыми. Продифференцированные $(n-3)$ раза тождества Бианки дают тождества, в которых высший порядок коэффициентов равен n, причем эти коэффициенты входят линейно. Тождества Бианки, следовательно, приводят к

$$4\binom{4}{n-3}$$

алгебраическим тождествам. Полное число этих тождеств следует вычесть из полного числа уравнений для коэффициентов, следующих из уравнений поля; эта процедура даст нам число независимых уравнений для определения коэффициентов n-го порядка.

Собирая все вместе и вычитая число независимых уравнений из числа коэффициентов n-го порядка, получаем число коэффициентов, которые можно выбрать произвольно. Это число равно

$$\Omega_n = \left[10\binom{4}{n} + 40\binom{4}{n-1} - D_n\right] - \left[40\binom{4}{n-1} + 10\binom{4}{n-2} - 4\binom{4}{n-3}\right].$$

Вынося за скобку множитель $\binom{4}{n}$ и используя приближенное выражение при больших n, получаем

$$\Omega_n \sim \binom{4}{n}\frac{15}{n}.$$

Сравнивая эту величину с результатом, полученным для волнового уравнения, мы видим, что гравитационные уравнения оставляют в $^5/_2$ раза больше неопределенных коэффициентов, чем волновое уравнение (для $n \gg 1$). Такой вывод кажется удивительным, ибо g_{ik} имеет десять компонент, тогда как φ — только одну.

Замечание. Совместность десяти гравитационных уравнений есть следствие существования четырех тождеств Бианки. Однако интересно отметить, что простого существования четырех тождеств самого по себе еще недостаточно, чтобы обеспечить абсолютную совместность. В этом отношении эффективность тождества зависит от порядка входящей в него производной g_{ik}. Если бы, например, мы имели систему, в которой тождества Бианки были пятой степени, а не третьей, то для асимптотического выражения Ω_n вычисление дало бы формулу

$$\Omega_n \sim \binom{4}{n}\left(-\frac{9}{n}\right) < 0,$$

которая означает, что такая система не была бы абсолютно совместной.

Применение метода к несимметричному полю

Наши уравнения имеют вид

$$\left.\begin{aligned} &\Gamma_k = 0, && g^{\overset{k\,i}{+-}}_{;s} = 0 \\ &R_{\underline{ik}} = 0, && R_{\underset{\vee}{ik},l} + R_{\underset{\vee}{kl},i} + R_{\underset{\vee}{li},k} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II.IIa)}$$

и существует шесть тождеств между ними: четыре тождества Бианки (с производными третьего порядка) от g_{ik}, тождество $(\mathfrak{g}^{it}_{;t} - \mathfrak{g}^{ti}_{;t} - 2\mathfrak{g}^{\underline{ti}}\Gamma_t)_{,i} = 0$ (с производными второго порядка) и тождество $(\eta^{iklm} R_{\underset{\vee}{ik},l} + R_{\underset{\vee}{kl},i} + R_{\underset{\vee}{li},m})_{,m} = 0$ (с производными четвертого порядка). Число свободных коэффициентов равно

$$\Omega_n = \left[16\binom{4}{n} + 64\binom{4}{n-1} - D_n\right] - \left[\left\{4\binom{4}{n-1} + \right.\right.$$

$$\left. + 64\binom{4}{n-1} + 10\binom{4}{n-2} + 4\binom{4}{n-3}\right\} -$$

$$\left.- \left\{1\binom{4}{n-2} + 4\binom{4}{n-3} + 1\binom{4}{n-4}\right\}\right],$$

или, асимптотически,

$$\Omega_n \sim \binom{4}{n}\frac{45}{n}.$$

Докажем теперь, что система уравнений типа (II.II) является более жесткой, чем система типа (I) (см. стр. 149).

Если бы в системе (II.IIa) при помощи уравнений $g_{ik;l}$ можно было исключить Γ, то W_{ik} [см. (I) и (II.II)] в этом случае содержали бы вторые производные от g_{ik}. В общем случае порядок производных не может быть меньше, и мы обозначим его через α. В случае системы (I) шесть уравнений $W_{\underset{\vee}{ik}} = 0$ приводят к $6\binom{4}{n-\alpha}$ условиям для коэффициентов n-го порядка. В случае (II.II) эти шесть уравнений заменяются восемью уравнениями $\mathfrak{g}^{\underset{\vee}{ik}}{}_{,k} = 0$, $W_{\underset{\vee}{ik},l} + W_{\underset{\vee}{kl},i} + W_{\underset{\vee}{li},k} = 0$, между которыми существует два тождественных соотношения, упомянутых на стр. 149. Число независимых условий для системы (II.II) тогда равно

$$\left[4\binom{4}{n-1} + 4\binom{4}{n-\alpha-1}\right] - \\ - \left[\binom{4}{n-2} + \binom{4}{n-\alpha-2}\right].$$

Вычитая число условий для системы из числа условий для системы (II.II), мы асимптотически получаем

$$6\binom{4}{n}\frac{3\alpha-4}{2n}.$$

Это число положительно для $\alpha \gg 2$, а это и показывает, что система (II.II) всегда является более жесткой, чем система (I). $\left(\text{Для } \alpha = 2 \text{ эта разность равна } \binom{4}{n}\frac{6}{n}.\right)$

§ 5. Общие замечания относительно понятий и методов теоретической физики

Если не считать окончательным переход к теории принципиально статистического характера, какой является, например, квантовая механика в ее современном виде, то цель физической теории можно сформулировать следующим образом: дать объективное (в принципе полное) описание физических систем и установить структуру законов, связывающих понятия, входящие в это объективное описание. Под «объективным описанием» понимается такое описание, которое может претендовать на справедливость и осмысленность без ссылок на какие бы то ни было акты наблюдения.

Единственное отличие физических теорий от математических построений заключается в следующем. Физическая теория должна давать существенно полное и воспроизводимое соответствие между описанной в определенных терминах реальностью и непосредственными чувственными восприятиями. Вопрос о том, как установить это соответствие, может решаться только интуитивно и не может быть выражен в рамках логически сформулированной теории.

Одна теория отличается от другой, главным образом, выбором «кирпичей» для фундамента, т. е. ни к чему не сводимых основных понятий, на которых построена вся теория. В классической теории (механика) такими основными понятиями являются материальная точка, сила взаимодействия между материальными точками (потенциальная энергия) и инерциальная система (последняя составляется из декартовой системы координат и временной координаты). С ростом наших знаний об электромагнитном поле к числу основных понятий наравне с материальной точкой (вещество) прибавилось понятие поля, рассматриваемого как второй носитель энергии.

Специальная теория относительности изменила эту схему лишь в том отношении, что в структуру инерциальной системы пришлось включить «факт» (на деле — гипотезу, основанную на ряде экспериментальных фактов, без которой, по-видимому, нельзя обойтись) постоянства скорости света. Теория предполагает далее, что мы можем отбросить концепцию материальной точки и иметь дело только с полевой концепцией. Это связано с тем, что относительность одновременности делает невозможным дальнейшее сохранение концепции дальнодействия и потенциальной энергии.

Еще более глубокие изменения теоретических основ внесла общая теория относительности, которая вовсе отбросила понятие инерциальной системы. В прежних теориях пространство, математически выражаемое инерциальной системой, рассматривалось как независимый элемент физической реальности. Этот элемент можно было рассматривать как нечто абсолютное, поскольку он определял поведение точечных масс или поля, которые сами на него не действовали. Однако в общей теории относительности инерциальная система заменяется полем смещений, которое является составной частью единого поля, представляющего собой единственное средство описания реального мира. Пространственный аспект реальных вещей, таким образом, полностью выражается полем, зависящим от четырех координат-параметров; он есть свойство этого поля. Если мы представим себе, что поле удалено, то не останется и «пространства», так как пространство не имеет независимого существования.

Этим можно закончить замечания *об изменениях*, которые связаны с развитием указанных идей. В связи с возможностями дальнейшего развития теоретических основ интересно спросить, что же осталось неизмененным в процессе этого развития. Для всех этих теорий, существенно, что они оперируют с пространственно-временным континуумом четырех измерений (во всяком случае, с конечным числом измерений). (Этот континуум может включать в себя или не включать сингулярные точки или линии.) Возможность отказа от этой фундаментальной предпосылки много раз рассматривалась, в частности, Риманом. Такой отказ от четырехмерного континуума, конечно, привел бы к ломке всех основных концепций, на которых строились рассматривавшиеся до сих пор теории.

Кроме всегда использовавшегося понятия континуума, прежние теории имели еще одну общую черту. Во всех этих теориях существенным является непременное наличие группы преобразований, так что одно и то же физическое состояние можно представить в различных формах, которые переходили одна в другую при преобразованиях этой группы. Чем шире группа преобразований, тем жестче она ограничивала круг возможных уравнений.

Во всех этих теориях считалось, что (четырехмерная) *точка* объективно существует, т. е. что она существует независимо от представления. Конкретной точке поля *в одном* представлении соответствует определенная точка в любом другом эквивалентном представлении той же самой физической системы. Математически это выражается тем фактом, что только такие преобразования считаются эквивалентными, которые связаны взаимнооднозначными преобразованиями координат.

Очевидно, что весь формализм современных теорий неразрывно связан с этим ограничением. Из него следует существование закона преобразования для дифференциалов координат dx^i, на котором основан закон преобразования векторов, а следовательно, и тензоров (ковариантный вектор можно, например, определить, рассматривая инвариант $a_i\,dx^i$). Если отбросить понятие вектора (и тензора), то от формализма существующих ныне теорий не останется ничего.

Хотя априори не очевидно, почему не может существовать эквивалентных представлений физической системы, в которых не сохранялась бы тождественность точки (в то время как весь континуум переходил бы сам в себя), я не вижу путей построения релятивистской теории в таком широком смысле. Для понимания существующей сейчас теории относительности, во всяком случае, важно знать, что она полностью основана на предположении об инвариантном смысле точки.

§ 6. Заключительные замечания

Результаты настоящего Приложения сводятся к следующему: в качестве естественного обобщения гравитационных уравнений в пустом пространстве мы рассматриваем систему уравнений:

$$g_{\underset{+\,-}{ik};s} = 0, \qquad \Gamma_i = 0,$$
$$R_{\underline{ik}} = 0, \qquad R_{\underset{\vee}{ik},l} + R_{\underset{\vee}{kl},i} + R_{\underset{\vee}{li},k} = 0.$$

Однако я должен объяснить, зачем я потратил столько сил, чтобы прийти к этому результату. Современные физики с трудом поймут это без соответствующего разъяснения, поскольку успех основанной на понятии вероятности квантовой механики убедил их, что физическая теория не должна ставить своей целью полное описание реальной ситуации. Я не хочу обсуждать здесь вопросы о том, почему я не разделяю этого убеждения или почему я не думаю, чтобы действительно интересная попытка де-Бройля и Бома дать в рамках формализма современной квантовой теории полное описание реально существующих индивидуальных явлений увенчалась успехом.

Существует, далее, убеждение, что нельзя одновременно сохранить концепции поля и частицы как элементов физического описания. Концепция поля требует, чтобы в поле не было сингулярностей, в то время как концепция частиц (как элементарная концепция) требует, чтобы они были. Концепция поля, однако, кажется неизбежной, поскольку без нее невозможна формулировка общей теории относительности. А общая теория относительности есть единственный способ избежать такой нереальной «вещи», как инерциальная система.

По этой причине я не вижу в существующей ситуации другого возможного пути, кроме чисто полевой теории, которая, впрочем, должна тогда решить такую чрезвычайно трудную задачу, как вывод атомистического характера энергии. Я считаю, далее, что уравнения гравитации для пустого пространства представляют собой единственный рационально обоснованный случай теории поля, который может претендовать на строгость (с учетом также и нелинейных членов). Все это приводит к попытке построить теорию единого поля путем обобщения теории гравитации для пустого пространства.

Предложенные обобщенные уравнения поля, однако, далеко еще не совершенны, так как мы пока не знаем, как находить свободные от сингулярностей решения такси системы уравнений; мы даже не имеем метода, с помощью которого можно было бы судить о существовании или отсутствии несингулярных решений. Поэтому от возможности сопоставления результатов теории с экспериментом нас пока отделяет непреодолимый барьер. Тем не менее я считаю неоправданным объявлять априори, что такая теория не сможет быть согласована с атомистическим характером энергии.

§ 7. Дополнение к Приложению II[6]

В теории уравнений поля важную роль играет понятие «жесткости» системы уравнений. Это понятие основано на следующем рассуждении. Если компоненты поля разлагать вблизи какой-нибудь точки в ряд Тэйлора, то производные каждого порядка (скажем, порядка n) приведут к появлению некоторого количества коэффициентов. Их

[6]Это дополнение напечатано в виде вкладки. — *Прим. ред.*

можно было бы выбирать произвольно, если бы не уравнения поля, которые устанавливают алгебраические связи между коэффициентами каждого порядка дифференцирования. При больших n часть коэффициентов остается свободной для выбора; число их записывается в виде

$$\Omega_n \binom{4}{n} \left(\frac{z_1}{n^2} + \frac{z_2}{n} + \ldots \right).$$

Когда n достаточно велико, многообразие решений рассматриваемой совокупности дифференциальных уравнений определяется числом z_1. Если приходится выбирать между несколькими различными совместными системами уравнений, то следует предпочесть наиболее «жесткую» из них, т. е. систему с наименьшим z_1.

При рассмотрении числа коэффициентов n-го порядка в системе уравнений общей теории относительности нужно помнить, что некоторые из них лишены объективного значения вследствие свободы в выборе координат[7].

По этой причине представляется естественным вычесть их число из общего числа коэффициентов n-го порядка; мы получим, таким образом, число свободных коэффициентов при полностью определенной координатной решетке. В Приложении II[8] эта поправка была введена неправильно; однако ее можно очень просто найти путем следующего рассуждения.

Тензорное поле, фигурирующее в уравнениях поля, обозначим через gut. При произвольном преобразовании координат оно будет меняться по закону

$$g^*_{ik} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial x^*_i} \frac{\partial x_\beta}{\partial x^*_k} g_{\alpha\beta}.$$

[7]Число таких коэффициентов обозначалось через D_n.

[8]Ссылка относится к стр. 167 основного текста статьи. — *Прим. ред.*

Если это выражение продифференцировать n раз по x_1^*, то впервые возникнут $(n+1)$-е производные от x_α по x_1^*. Следовательно, фиксируя их значения, можно произвольно задать

$$D_n = 4\binom{4}{n+1}$$

производных n-го порядка от g_{ik}^* без какого-либо «реального» изменения поля. Это и есть то число, которое мы должны вычесть из числа коэффициентов n-го порядка, чтобы правильно судить о свободе, действительно присущей полю. В результате получим

$$D_n = \binom{4}{n} 4\frac{n+4}{n+1} \sim \binom{4}{n} 4\left(1+\frac{3}{n}\right) \sim$$
$$\sim \binom{4}{n}\left(4+\frac{12}{n}\right).$$

Старые рассуждения давали вместо этого результата ошибочный

$$\binom{4}{n}\left(4+\frac{9}{n}\right).$$

Если устранить эту ошибку в Приложении II, то для ковариантных уравнений характеристические числа z_n будут меньше на три единицы:

Система уравнений	z_n	
Гравитационные уравнения	12 (вместо 15)	Число свободных для выбора коэффициентов n-порядка
$g_{\underset{+}{k}\overset{}{}\underset{-}{l}; s} = 0$; $R_{\underline{ik}} = 0$ $\Gamma_k = 0$; $R_{\underset{\vee}{ik}, l} + \ldots = 0$	42 (вместо 45)	$\Omega_n = \binom{4}{n}\left(\frac{z_1}{n} + \ldots\right)$

Теорию уравнений поля можно сделать более ясной путем следующих рассуждений.

При логически последовательном подходе к несимметричной теории поля мы рассуждали по такой схеме.

Вводится несимметричный символ Γ^i_{kl}, и из него строится тензор кривизны

$$R^i_{klm} = \Gamma^i_{kl,m} - \Gamma^i_{km,l} - \Gamma^i_{sl}\Gamma^s_{km} + \Gamma^t_{sm}\Gamma^s_{kl}.$$

После свертки

$$R_{kl} = \Gamma^s_{kl,s} - \Gamma^s_{kt}\Gamma^t_{ls} - \Gamma^s_{ks,l} + \Gamma^s_{kl}\Gamma^t_{st}.$$

Тогда, следуя Палатини, получаем при бесконечно малой вариации поля

$$\delta R_{kl} = \delta(\Gamma^{s}_{\underset{+-}{kl}})_{;s} - (\delta\Gamma^s_{\underset{+}{k}s})_{;l},$$

что естественным образом обобщает выражение, появляющееся в случае симметричного поля. Чтобы сформулировать вариационный принцип с помощью R_{ik}, введем несимметричный тензор g_{kl} и его контравариантную тензорную плотность $\mathfrak{g}^{ik}$. Затем, используя оба поля, образуем скалярную плотность

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{g}^{kl}R_{kl},$$

интеграл по пространству от которой варьируется по $\mathfrak{g}^{kl}$ и Γ^m_{kl} независимо. После использования метода Палатини, варьирование приводит к уравнениям поля

$$\left.\begin{aligned} R_{kl} &= 0 \\ -\mathfrak{g}^{\underset{+-}{kl}}_{;m} + \mathfrak{g}^{\underset{+-}{kt}}_{;t}\,\delta^l_m + \mathfrak{g}^{kl}\Gamma_m + \mathfrak{g}^{kt}\Gamma_t\delta^l_m &= 0 \end{aligned}\right\}, \qquad \text{(II.I)}$$

где

$$\frac{1}{2}(\Gamma^s_{ls} - \Gamma^s_{sl}) = \Gamma^s_{\underset{\vee}{ls}} = \Gamma_l.$$

Появление последних двух членов в левой части второго уравнения показывает, что вариационный принцип не приводит непосредственно к уравнению $g_{\underset{+-}{ik};l} = 0$, которого мы могли бы ожидать по аналогии с симметричной теорией. Эти члены возникают по той причине, что величину $(\mathfrak{g}^{kl}\delta\Gamma^{s}_{kl})_{;s}$, которая имеет вид $\mathfrak{A}^{\overset{s}{+}}_{;s}$, *нельзя* заменить на $\mathfrak{A}^{s}_{;s}$ и, следовательно, при интегрировании ее нельзя преобразовать в интеграл по поверхности. Преодоление этой трудности составляет существенную задачу при выводе уравнений поля.

В Приложении II эта задача решается введением дополнительно условия $\mathfrak{g}^{\overset{ks}{\vee}}_{,s} = 0$ для поля g_{ik}. Несколько проще следующий путь.

Заменим в вариационном принципе поле смещений Γ^{l}_{ik} на выражение $\Gamma^{s}_{kl} = \Gamma^{s^*}_{kl} + \delta^{s}_{k}\lambda_{l}$, где λ_l — вектор. По своим трансформационным свойствам $\Gamma^{s^*}_{kl}$ снова образует поле смещений. При заданном Γ^{s}_{kl} остается произвол в выборе λ_l. Следовательно, после варьирования можно выбрать λ_l так, чтобы выполнялось условие («нормировка»):

$$\Gamma^{*}_{k} = \frac{1}{2}(\Gamma^{s^*}_{ks} - \Gamma^{s^*}_{sk}) = 0.$$

Это, собственно, и было причиной введения $\Gamma^{s^*}_{kl}$.

В вариационном принципе мы можем независимо варьировать $\Gamma^{i^*}_{kl}$ и λ_k. Тем не менее варьирование дает не $64 + 4$, а только 64 независимых алгебраических уравнения, так как варьирование по λ_l эквивалентно определенным образом выбранному варьированию по $\Gamma^{i^*}_{kl}$.

Подставляя новые $\Gamma^{i^*}_{kl}$ в свернутый тензор кривизны, путем прямого вычисления получаем выражение

$$R_{kl} = R^{*}_{kl} - (\lambda_{k,l} - \lambda_{l,k}),$$

где R^{*}_{ik} — та же функция от $\Gamma^{i^*}_{kl}$, что R_{ik} от Γ^{*}_{kl}. Подынтегральное выражение в вариационном принципе теперь принимает вид

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{g}^{kl}\left[R^{*}_{kl} - (\lambda_{k,l} - \lambda_{l,k})\right].$$

Варьируя λ_k, получаем

$$\mathfrak{g}^{\overset{ks}{\vee}}_{,s} = 0,$$

тогда как варьирование по Γ^{s*}_{kl} приводит к результату

$$-\mathfrak{g}^{\underset{+-}{kl}}_{;\underset{*}{s}} + \mathfrak{g}^{\underset{+-}{kt}}_{;\underset{*}{t}}\delta^l_s + \mathfrak{g}^{kl}\Gamma^*_s + \mathfrak{g}^{kt}\Gamma^*_s\delta^l_s = 0.$$

Второе из этих уравнений совпадает со вторым из уравнений (II.I) при условии, что Γ^i_{kl} заменено на Γ^{i*}_{kl}. Кроме того, легко убедиться, что первое уравнение становится тождественным второму, если свернуть последнее по индексам s и k.

После нормировки поля Γ^{i*}_{kl} в соответствии с условием $\Gamma^*_k = 0$ второе уравнение принимает вид

$$\mathfrak{g}^{\underset{+-}{kl}}_{;\underset{*}{s}} = 0 \text{ и соответственно } \mathfrak{g}_{\underset{+-}{kl};\underset{*}{s}} = 0,$$

где абсолютное дифференцирование проводится при помощи Γ^{s*}_{kl}. Варьирование по $\mathfrak{g}^{kl}$ дает уравнение

$$R^*_{kl} - (\lambda_{k,l} - \lambda_{l,k}) = 0,$$

или, по исключении λ_k,

$$R^*_{\underline{kl}} = 0,$$

$$R^*_{\underset{\vee}{kl},m} + R^*_{\underset{\vee}{lm},k} + R^*_{\underset{\vee}{mk},l} = 0.$$

Объединяя результаты, получаем тот же набор уравнений, который был выведен в работе при помощи вспомогательного условия $\mathfrak{g}^{\overset{ks}{\vee}}_{,s} = 0$, а именно

$$\left.\begin{array}{ll} \mathfrak{g}^{\underset{+-}{kl}}_{;m} = 0; & \Gamma_k = 0 \\ R_{\underline{kl}} = 0; & R_{\underset{\vee}{kl},m} + R_{\underset{\vee}{lm},k} + R_{\underset{\vee}{mk},l} = 0 \end{array}\right\}, \qquad \text{(II.II)}$$

где Γ^{s*}_{kl} всюду заменено на Γ^s_{kl}.

Системы (II.I) и (II.II) эквивалентны, поскольку они следуют из одного и того же вариационного принципа. Тем не менее легко видеть, что уравнения (II.II) выражают налагаемые на поле условия более удовлетворительно, чем уравнения (II.I). Действительно, пусть Γ^s_{kl} и $\mathfrak{g}^{kl}$ — решение уравнений (II.I). Мы получим соответствующее решение уравнений (II.II), положив

$$\Gamma^{s*}_{kl} = \Gamma^s_{kl} + \delta^s_k \lambda_l,$$

$$\Gamma^*_k = \frac{1}{2}\left(\Gamma^{s*}_{ks} - \Gamma^{s*}_{sk}\right) = 0$$

и вычислив Γ^{s*}_{kl} из Γ^s_{kl}. Исключение λ_l дает

$$\Gamma^{s*}_{kl} = \Gamma^s_{kl} + \frac{2}{3}\delta^s_k \Gamma_l.$$

Следовательно, каждый раз, когда задано поле $g_{kl} - \Gamma^s_{kl}$, удовлетворяющее системе (II.I), существует одно и только одно поле $g_{kl} - \Gamma^{s*}_{kl}$, удовлетворяющее системе (II.II). Обратное, однако, не справедливо, поскольку правая часть этого уравнения удовлетворяет четырем алгебраическим тождествам, так что его нельзя разрешить относительно Γ^s_{kl}. Следовательно, имеются различные по форме решения системы (II.I), отвечающие одному и тому же решению системы (II.II).

Дополним эти рассуждения следующим. Система (II.II) полна, хотя число переменных поля (16+64) на четыре единицы больше, чем число уравнений (64+10+4+4), уменьшенное на число тождеств (4+ + 1 + 1), как это и должно быть в релятивистских теориях. Соответственно, в общем решении не появится произвольных функций четырех координат. В этом смысле система (II.II) полностью определяет переменные поля, фигурирующие в ней.

То же самое выполнялось бы для системы (II.I), если бы, кроме тождеств Бианки, не существовало еще одно тождество. В этом случае система уравнений содержала бы (16 + 64) переменных поля, (16 + +64) уравнения и четыре тождества; число переменных оказывалось бы в результате на четыре больше, чем разность между числом уравнений и числом тождеств. Существует, однако, дополнительное тождество. Если обозначить через $\mathfrak{A}^{kl}_m$ левую часть второго уравнения в системе (II.I), то можно показать, что существует следующее тождество:

$$\mathfrak{A}^{st}_{s,t} \equiv 0.$$

Существование этого тождества соответствует инвариантности R_{kl} и, следовательно, $\mathfrak{H}$ относительно преобразования $\Gamma^{s*}_{kl} = \Gamma^s_{kl} + \delta^s_k \lambda_{,l}$, где λ — произвольный скаляр.

Отсюда следует, что система (II.I) недостаточна для определения своих (16 + 64) переменных поля, и в общем решении появится произвольная функция четырех координат. Таким образом, чтобы сделать систему (II.I) полностью определенной по отношению к выбранным переменным, мы должны присоединить к ней произвольное скалярное уравнение.

Можно выбрать, например, одно из следующих двух уравнений:

$$g^{kl}\Gamma_k\Gamma_l = 0,$$
$$(\mathfrak{g}^{ks}\Gamma_s)_{,k} = 0.$$

Порядок дифференцирования равен 1 в первом уравнении и 2 во втором. (Соответственно, в системе (II.II) полная определенность достигается произвольной нормировкой, согласно условию $\Gamma_i = 0$.)

Теперь для каждой из этих двух полностью определенных систем можно вычислить характеристическое число z_1, дающее число коэффициентов разложения, которые могут быть выбраны произвольно.

Сравнение систем (II.II) и (II.I) дает :

Система уравнений	z_1
Система (II.II)	42
Дополненная система (II.I)	45 или 48

Таким образом, мы видим, что даже после того как система (II.I) сделана полной, в ней остается на три коэффициента больше, чем в случае, когда законы поля описываются системой (II.II). Это одна из причин, по которой мы должны предпочесть описание законов поля с помощью системы (II.II) описанию с помощью системы (II.I).

Дополнительный аргумент для предпочтения системы (II.II) можно усмотреть в том, что она удовлетворяет двум условиям.

1. Она содержит наиболее естественное уравнение для определения Γ^{s}_{kl} по g_{kl}:

$$g_{\underset{+-}{k};m} = 0.$$

2. Как уже указывалось в самой работе, система (II.II) инвариантна по отношению к транспонированию. Здесь мы хотим только подчеркнуть, что при выводе системы (II.II) можно обойтись без налагаемого заранее на поле g_{kl} условия $\mathfrak{g}^{ks}_{,\overset{\vee}{s}} = 0$.

Причины, заставившие меня считать неестественным введение других добавочных членов в вариационный принцип, конечно, остаются теми же. Такие добавочные члены не могли были бы содержать Γ, иначе уравнение $g_{\underset{+-}{kl};m} = 0$, определяющее Γ, перестало бы быть справедливым; поэтому они могут зависеть только от g_{kl} и их производных. Такие добавки нарушили бы однородную структуру теории.

Приложение II к пятому изданию

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ТЕОРИЯ НЕСИММЕТРИЧНОГО ПОЛЯ[1]

Прежде чем перейти собственно к предмету статьи, я хочу обсудить в общем виде вопрос о «жесткости» систем уравнений поля. Это понятие представляет самостоятельный интерес независимо от излагаемой здесь конкретной теории. Однако для более глубокого понимания нашей проблемы оно является почти неизбежным,

§ 1. О «совместности» и «жесткости» систем уравнений поля

Если заданы какие-то определенные переменные поля и система уравнений пóля для них, то

---

[1] *Relativistic Theory of the non-symmetric Field.* The Meaning of Relativity. Fifth edition. Princeton, 1955. [В русском переводе 4-го издания «Сущности теории относительности» этого приложения но было, так как включался старый вариант. — *Ред.*].

Пятое издание книги вышло также на немецком (Braunschweig, 1960) и на французском языках (Paris, Gauthier-Villars, 1960). В предисловии к нему Эйнштейн писал:

«Для этого издания я полностью переработал «Обобщение теории гравитации», озаглавив его «Релятивистская теория несимметричного поля». Мне удалось — частично в сотрудничестве с моей ассистенткой Б. Кауфман — упростить вывод и саму форму уравнений поля. Вся теория стала после этого более прозрачной, хотя ее содержание и не изменилось».

последняя в общем случае еще не определяет поле полностью. В решении остаются еще некоторые свободные параметры. Чем меньше число свободных параметров, совместных с системой уравнений поля, тем «жестче» система. Ясно, что при отсутствии какого-либо другого критерия для выбора уравнений более жесткую систему уравнений следует предпочитать менее жесткой. Наша цель состоит в том, чтобы найти мору такой жесткости уравнений. Оказывается, что можно определить такую меру, которая дает нам возможность сравнивать жесткость систем даже в том случае, если эти системы обладают различным числом и разными типами переменных поля.

Мы поясним используемые здесь понятия и методы на примерах возрастающей сложности, ограничиваясь четырехмерными полями, и при рассмотрении этих примеров будем вводить соответствующие понятия в последовательном порядке.

Первый пример. *Скалярное волновое уравнение*[2].

$$\varphi_{,11} + \varphi_{,22} + \varphi_{,33} - \varphi_{,44} = 0.$$

Здесь система состоит лишь из единственного дифференциального уравнения для одной переменной поля. Предположим, что φ разлагается в ряд Тейлора вблизи точки P (иначе говоря, что функция является φ аналитической). Тогда совокупность коэффициентов полностью описывает функцию. Число коэффициентов n-го порядка (то есть число производных φ n-го порядка в точке P) равно $\dfrac{4.5\ldots(n+3)}{1.2\ldots n}$ (сокращенно $\binom{4}{n}$) и все эти коэффициенты можно выбирать произвольно, если дифференциальное уравнение не устанавливает каких-либо связей между

---

[2] В дальнейшем запятая всегда будет означать частные производные, например,

$$\varphi_{,i} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}, \quad \varphi_{,11} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^1\,\partial x^1} \quad \text{и т. д.}$$

ними. Так как исходное уравнение второго порядка, то эти связи мы найдем, дифференцируя наше уравнение $(n-2)$ раза. Таким образом, для коэффициентов n-го порядка мы получим $\binom{4}{n-2}$ условий. Поэтому число коэффициентов n-го порядка, остающихся произвольными, составит

$$z = \binom{4}{n} - \binom{4}{n-2}. \qquad \text{(III.1)}$$

Это число положительно для всякого n. Следовательно, если произвольные коэффициенты для всех порядков, меньших n, будут зафиксированы, то условиям для коэффициентов n-го порядка всегда можно удовлетворить, не изменяя уже выбранных коэффициентов.

Аналогичное рассуждение можно привести для систем из нескольких уравнений. Если число свободных коэффициентов n-го порядка не меньше нуля, мы называем систему уравнений абсолютно совместной. Ограничимся именно такими системами уравнений. Все известные мне системы, используемые в физике, принадлежат к этому типу.

$$\binom{4}{n-2} = \binom{4}{n} \frac{(n-1)n}{(n+2)(n+3)} =$$
$$= \binom{4}{n}\left(1 - \frac{z_1}{n} + \frac{z_2}{n^2} + \ldots\right),$$

где $z_1 = +6$.

Ограничиваясь большими значениями n, можно пренебречь членами $\frac{z_2}{n^2}$ и т. д. в скобках, и для уравнения (III.1) мы получим *асимптотически*

$$z \sim \binom{4}{n} \frac{z_1}{n} = \binom{4}{n} \frac{6}{n}. \qquad \text{(III.1a)}$$

Назовем z_1 «коэффициентом свободы», в нашем случае он равен 6. Чем больше этот коэффициент, тем слабее соответствующая система уравнений,

Второй пример. *Уравнения Максвелла для пустого пространства.*

$$\varphi^{is}_{,s} = 0; \quad \varphi_{ik,l} + \varphi_{kl,i} + \varphi_{li,k} = 0.$$

Тензор φ^{ik} получается из антисимметричного тензора φ_{ik} путем поднимания ковариантных индексов с помощью

$$\eta^{ik} = \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & +1 \end{bmatrix}.$$

Мы имеем 4+4 уравнений поля для шести переменных поля. Среди этих восьми уравнений существуют два тождества. Если обозначить левые части уравнений поля через G^i и H_{ikl} соответственно, тождества примут вид

$$G^i_{,i} \equiv 0; \quad H_{ikl,m} - H_{klm,i} + H_{lmi,k} - H_{mik,l} = 0.$$

В этом случае мы рассуждаем следующим образом. Разложение шести переменных поля в ряды Тэйлора дает

$$6\binom{4}{n}$$

коэффициентов n-го порядка. Условия, которым должны подчиняться эти коэффициенты n-го порядка, получаются $(n-1)$-кратным дифференцированием восьми уравнений поля первого порядка. Поэтому число этих условий равно

$$8\binom{4}{n-1}.$$

Однако эти условия не все независимы, так как среди восьми уравнений существуют два тождества второго порядка. После $(n-2)$-кратного дифференцирования они дают

$$2\binom{4}{n-2}$$

алгебраических тождеств для условий, полученных из уравнений поля. Поэтому число свободных коэффициентов n-го порядка равно

$$z = 6\binom{4}{n} - \left[8\binom{4}{n-1} - 2\binom{4}{n-2}\right].$$

Число z положительно для всех n. Таким образом, система уравнений является «абсолютно совместной». Вынося за скобки множитель $\binom{4}{n}$ в правой части и разлагая, как и выше, в ряд для больших n, мы получаем

$$z = \binom{4}{n}\left[6 - 8\frac{n}{n+3} + 2\frac{(n-1)n}{(n+2)(n+3)}\right] \sim$$
$$\sim \binom{4}{n}\left[6 - 8\left(1 - \frac{3}{n}\right) + 2\left(1 - \frac{6}{n}\right)\right] \sim \binom{4}{n}\left[0 + \frac{12}{n}\right].$$

Таким образом, здесь $z_1 = 12$. Это говорит о том, что рассматриваемая система определяет поле менее жестко, чем в случае скалярного волнового уравнения ($z_1 = 6$). Равенство нулю постоянного члена в скобках в обоих случаях выражает тот факт, что рассматриваемая система не содержит никаких произвольных функций четырех переменных.

Третий пример. *Уравнения гравитации для пустого пространства.* Запишем их в виде:

$$R_{ik} = 0; \quad g_{ik,l} - g_{sk}\Gamma^s_{il} - g_{is}\Gamma^s_{lk} = 0.$$

Компоненты тензора R_{ik} содержат только величины Γ и являются величинами первого порядка по отношению к ним. Будем здесь считать независимыми переменными поля g и Γ. Второе уравнение показывает, что удобно рассматривать Γ как величины первого порядка при дифференцировании, т. е. что в разложении

$$\Gamma = \underset{0}{\Gamma} + \underset{1}{\Gamma_s} x^s + \underset{0}{\Gamma_{st}} x^s x^t + \ldots$$

следует считать $\underset{0}{\Gamma}$ величиной первого порядка, $\underset{1}{\Gamma^s}$ — величиной второго порядка и т. д. Соответственно компоненты R_{ik} следует рассматривать как величины второго порядка. Для этих уравнений существуют четыре тождества Бианки, которые вследствие сделанных выше предположений следует считать связанными с величинами третьего порядка.

В общековариантной системе уравнений возникает новое обстоятельство, существенное для правильного определения свободных коэффициентов. Поля, получаемые одно из другого только преобразованиями координат, надлежит рассматривать лишь как разные представления одного и того же поля. Соответственно лишь часть из

$$10\binom{4}{n}$$

коэффициентов n-то порядка функций g_{ik} служит для определения существенно различных полей. Поэтому число коэффициентов разложения, фактически определяющих поле, уменьшается на некоторую величину, которую мы теперь вычислим.

В законе преобразования величин g_{ik}

$$\overset{*}{g}_{ik} = \frac{\partial x^a}{\partial x^{i^*}} \frac{\partial x^b}{\partial x^{k^*}} g_{ab}$$

функции g_{ab} и $\overset{*}{g}_{ik}$ на самом деле представляют одно и то же поле. Дифференцируя это уравнение n раз по x^*, мы замечаем, что коэффициенты n-го порядка в разложении g^* содержат все $(n+1)$-е производные четырех функций x по x^*; другими словами, здесь появляются $4\binom{4}{n+1}$ чисел, не играющих роли при определении поля. Поэтому во всякой общерелятивистской теории необходимо вычесть $4\binom{4}{n+1}$ из общего числа коэффициентов n-го порядка, чтобы учесть общековариантность теории. Подсчет числа свободных коэффициентов n-го порядка приводит, таким образом, к следующему результату.

Десять величин g_{ik} (нулевого порядка в смысле дифференцирования) и сорок величин Γ^l_{ik} (первого порядка в смысле дифференцирования) с учетом только что рассмотренной поправки дают

$$10\binom{4}{n}+40\binom{4}{n-1}-4\binom{4}{n+1}$$

соответствующих коэффициентов. Уравнения поля (10 уравнений второго и 40 первого порядка) дают для них

$$N=10\binom{4}{n-2}+40\binom{4}{n-1}$$

условий. Однако из этого числа N необходимо вычесть число тождеств

$$4\binom{4}{n-3},$$

которые получаются из тождеств Бианки (третьего порядка). В результате находим

$$z=\left[10\binom{4}{n}+40\binom{4}{n-1}-4\binom{4}{n+1}\right]-\\ -\left[10\binom{4}{n-2}+40\binom{4}{n-1}\right]+\binom{4}{n-3}.$$

Вынося за скобки множитель $\binom{4}{n}$ мы получаем асимптотическую формулу для больших n

$$z\sim\binom{4}{n}\left[0+\frac{12}{n}\right].$$

Следовательно, $z_1 = 12$. В этом случае число z также положительно для всех n, так что система является абсолютно совместной в смысле данного выше определения. Поразительно, что уравнения гравитационного поля для пустого пространства определяют поле с такой же жесткостью, как уравнения Максвелла в случае электромагнитного поля.

§ 2. Релятивистская теория поля

Общие замечания

Существенное достижение общей теории относительности заключается в том, что она избавила физику от необходимости вводить «инерциальную систему» (или «инерциальные системы»). Это понятие неудовлетворительно по той причине, что оно без какого-либо обоснования выделяет из всех мысленно возможных систем координат некоторые системы. Затем делается предположение, что законы физики выполняются *только* для таких инерциальных систем (например, закон инерции и закон постоянства скорости света). Таким образом в системе физики, пространство как таковое наделяется ролью, выделяющей его из всех прочих элементов физического описания. Оно играет определяющую роль во всех процессах, не испытывая их обратного воздействия. Хотя подобная теория является логически возможной, но, с другой стороны, она выглядит не совсем удовлетворительной. Ньютон вполне сознавал этот недостаток, но он столь же ясно понимал, что иного пути для физики в то время не было. Среди физиков позднейшего времени особое внимание на это обстоятельство обратил Эрнст Мах.

Какие новые идеи в развитии основ физики после Ньютона позволили преодолеть исключительность инерциальных систем? Прежде всего, введение понятия поля в теорию электромагнитных явлений Фарадея и Максвелла, или, точнее, введение поля как независимого, ни к чему уже не сводимого фундаментального понятия. Насколько мы способны судить в настоящее время, общая теория относительности может мыслиться только как теория поля. Ее нельзя было бы создать, придерживаясь точки зрения, что реальный мир состоит из материальных точек, движущихся под влиянием сил их взаимодействия. Всякий, кто попытался бы объяснить Ньютону равенство инерциальной и гравитационной масс исходя из принципа эквивалентности обязательно должен был бы ответить на следующее возражение: правда ли, что в ускоренной системе координат тела испытывают такое же ускорение, как и вблизи поверхности притягивающего их небесного тела? Но где же находятся в первом случае массы, производящие ускорение? Ясно, что теория относительности предполагает независимость понятия поля.

Математический аппарат, позволивший создать общую теорию относительности, мы находим в геометрических исследованиях Гаусса и Римана. Первый из них в своей теории поверхностей исследовал метрические свойства поверхности, вложенной в трехмерное евклидово пространство, и показал, что эти свойства можно описывать с помощью понятий, относящихся только к самой поверхности и не связанных с пространством, в которое она вложена. Так как в общем случае на поверхности не существует предпочтительных систем координат, то это исследование впервые привело к выражению соответствующих величин в общих координатах. Риман распространил эту двумерную теорию поверхностей на пространства с произвольным числом измерений (пространства с римановой метрикой, которые характеризуются полем симметричных тензоров второго ранга). В этом замечательном исследовании он нашел общее выражение для кривизны многомерных метрических пространств.

Это кратко очерченное развитие математической теории, существенное для возникновения общей теории относительности, привело к тому, что сначала фундаментальным понятием, на котором была основана общая теория относительности, устранившая роль инерциальных систем, явилась метрика Римана. Однако позднее Леви-Чивита правильно указал на то, что элементом теории, позволяющим устранять инерциальную систему, является, собственно говоря, поле бесконечно малых смещений Γ^l_{ik}. Метрическое, или симметричное тензорное, поле g_{ik}, определяющее поле Γ^l_{ik}, связано с устранением роли инерциальной системы лишь косвенно, в той мере, в какой оно определяет поле смещений. Это ясно из следующего рассуждения.

Переход от одной инерциальной системы к другой определяется *линейным* преобразованием (специального вида). Если в двух произвольно удаленных точках P_1 и P_2 существуют два вектора $\underset{1}{A^i}$ и $\underset{2}{A^i}$, соответственные компоненты которых взаимно равны $\underset{1}{A^i} = \underset{2}{A^i}$, то при разрешенном преобразовании это равенство сохраняется. Если в формуле преобразования

$$A^{i^*} = \frac{\partial x^{i^*}}{\partial x^a} A^a$$

коэффициенты $\frac{\partial x^{i^*}}{\partial x^a}$ не зависят от x^a, то формула преобразования для компонент вектора не зависит от положения. Равенство компонент двух векторов в разных точках P_1 и P_2 является, следовательно, инвариантным соотношением, пока мы ограничиваемся инерциальными системами. Однако, если мы отказываемся от понятия инерциальной системы и разрешаем тем самым произвольные непрерывные преобразования координат, так чтобы коэффициенты $\frac{\partial x^{i^*}}{\partial x^a}$ зависели от координат x^a, то равенство компонент двух векторов, построенных в разных точках пространства, теряет свой инвариантный смысл, и, следовательно, такие векторы не могут непосредственно сравниваться. Именно по этой причине в общей теории относительности нельзя образовывать новые тензоры из данного тензора простым дифференцированием, и именно поэтому инвариантные образования встречаются в этой теории в гораздо меньшем количестве. Этот недостаток исправляется введением поля бесконечно малых смещений. Оно заменяет инерциальную систему постольку, поскольку позволяет проводить сравнение векторов в бесконечно близких точках. Отправляясь от этого понятия, мы рассмотрим в этом приложении релятивистскую теорию поля, опуская все, что является несущественным для нашей цели.

Поле бесконечно малых смещений Γ

Контравариантный вектор A^i в точке P (с координатами x^i) и вектор $A^i+\delta A^i$ в бесконечно близкой точке (x^t+dx^t) мы связываем билинейным выражением

$$\delta A^i = -\Gamma^i_{st} A^s\, dx^t, \qquad \text{(III.2)}$$

причем величины Γ являются функциями x. С другой стороны, если A есть векторное поле, то компоненты (A^i) в точке (x^t+dx^t) равны A^i+dA^i, где[3]

$$dA^i = A^i_{\ ,t}\, dx^t.$$

Разность этих двух векторов в точке x^t+dx^t тогда сама является вектором

$$(A^i_{\ ,t} + A^s\Gamma^i_{st})\, dx^t \equiv A^i_{;t}\, dx^t,$$

связывающим компоненты векторного поля в двух бесконечно близких точках. Поле смещений заменяет инерциальную систему, поскольку оно удовлетворяет этому соотношению, формально установленному для инерциальной системы. Выражение

---

[3]Как и прежде, символ «$_{,t}$» означает частное дифференцирование $\dfrac{\partial}{\partial x^t}$.

в скобках, обозначенное для краткости через A^i_l, является тензором.

Тензорный характер A^i_l определяет закон преобразования для величин Γ. Сначала имеем

$$A^{i^*}_{k_*} = \frac{\partial x^{i^*}}{\partial x^i}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k^*}}A^i_k.$$

Использование одного и того же индекса в обеих системах не означает, что этот индекс относится к соответственным компонентам. Другими словами, индекс i в x^* и в x пробегает значения от 1 до 4 независимо. После некоторой практики такое обозначение значительно облегчает чтение уравнений. Теперь мы заменим

$$A^{i^*}_k \quad \text{на} \quad A^{i^*}_{,k} + A^{s^*}\Gamma^{i^*}_{sk},$$
$$A^i_k \quad \text{на} \quad A^i_{,k} + A^s\Gamma^i_{sk}$$

и, с другой стороны,

$$A^{i^*} \quad \text{на} \quad \frac{\partial x^{i^*}}{\partial x^i}A^i, \qquad \frac{\partial}{\partial x^{k^*}} \quad \text{на} \quad \frac{\partial x^k}{\partial x^{k^*}}\frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Это приводит к уравнению, содержащему кроме величин Γ^* только полевые величины первоначальной системы и их производные по координатам x первоначальной системы. Разрешая это уравнение относительно Γ^*, мы получаем искомую формулу преобразования

$$\Gamma^{i^*}_{kl} = \frac{\partial x^{i^*}}{\partial x^i}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k^*}}\frac{\partial x^l}{\partial x^{l^*}}\Gamma^i_{kl} - \frac{\partial^2 x^{i^*}}{\partial x^s\,\partial x^t}\frac{\partial x^s}{\partial x^{k^*}}\frac{\partial x^t}{\partial x^{l^*}}. \qquad \text{(III.3)}$$

Второй член (в правой части) можно несколько упростить:

$$-\frac{\partial^2 x^{i^*}}{\partial x^s\,\partial x^t}\frac{\partial x^s}{\partial x^{k^*}}\frac{\partial x^t}{\partial x^{l^*}} = -\frac{\partial}{\partial x^{l^*}}\left(\frac{\partial x^{i^*}}{\partial x^s}\right)\frac{\partial x^s}{\partial x^{k^*}} =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x^{l^*}}\left(\frac{\partial x^{i^*}}{\partial x^{k^*}}\right) + \frac{\partial x^{i^*}}{\partial x^s}\frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{k^*}\,\partial x^{l^*}} =$$

$$= \frac{\partial x^{i^*}}{\partial x^s}\frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{k^*}\,\partial x^{l^*}}. \qquad \text{(III.3a)}$$

Такую величину мы будем называть *псевдотензором*. При линейных преобразованиях она преобразуется как тензор, тогда как для нелинейных преобразований прибавляется член, который не содержит преобразуемого выражения, но зависит лишь от коэффициентов преобразования.

Замечания о поле смещений

1. Величина $\tilde{\Gamma}^i_{kl}$, получаемая при транспонировании нижних индексов, также преобразуется в соответствии с формулой (III.3) и потому тоже является полем смещений.

2. Выделяя симметричную или антисимметричную по нижним индексам k^* и l^* часть уравнения (III.3), мы получаем два уравнения:

$$\Gamma^{i^*}_{\underline{kl}}\left(=\frac{1}{2}\left(\Gamma^{i^*}_{kl}+\Gamma^{i^*}_{lk}\right)\right) = \frac{\partial x^{i^*}}{\partial x^i}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k^*}}\frac{\partial x^l}{\partial x^{l^*}}\Gamma^i_{\underline{kl}} - \frac{\partial^2 x^{i^*}}{\partial x^s\,\partial x^t}\frac{\partial x^s}{\partial x^{k^*}}\frac{\partial x^t}{\partial x^{l^*}},$$

$$\Gamma^{i^*}_{\underset{\vee}{kl}}\left(=\frac{1}{2}\left(\Gamma^{i^*}_{kl}+\Gamma^{i^*}_{lk}\right)\right) = \frac{\partial x^{i^*}}{\partial x^i}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k^*}}\frac{\partial x^l}{\partial x^{l^*}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{kl}}.$$

Следовательно, две составных части (симметричная и антисимметричная) величин Γ^i_{kl} преобразуются независимо, т. е., не перемешиваясь. Таким образом, с точки зрения закона преобразования, они выглядят как независимые величины. Второе из этих уравнений показывает, что величина $\Gamma^{t}_{\vee kl}$ преобразуется как тензор. Поэтому, с точки зрения группы преобразований, сначала кажется неестественным объединять аддитивно эти две величины в одну.

3. С другой стороны, нижние индексы Г играют совершенно различные роли в определяющем уравнении (III.2), так что не существует никакой причины, заставляющей ограничивать Г условием симметрии по нижним индексам. Если тем не менее это условие накладывается, то оно ведет к теории чисто гравитационного поля. Если же не подчинять величины Г ограничительному условию симметрии, то мы приходим к обобщению закона гравитации, которое представляется мне естественным.

Тензор кривизны

Хотя поле Г само не обладает тензорным характером, оно предполагает существование тензора. Этот тензор мы без труда получаем, перенося вектор A^i в соответствии с уравнением (III.2) вдоль контура, замыкающего бесконечно малый элемент двумерной поверхности, и вычисляя его изменение за один обход контура. Это изменение обладает векторным характером.

Пусть $\underset{0}{x}^t$ — координаты фиксированной точки и x^t — координаты другой точки на контуре. Тогда разность $\xi^t = x^t - \underset{0}{x}^t$ будет малой для всех точек контура, и ее можно использовать в качестве базиса при определении порядков величины.

Интеграл $\oint \delta A^i$ необходимо затем вычислить, используя более явные обозначения

$$-\oint \underline{\Gamma^{i}_{st} A^{s}}\, dx^t \quad \text{или} \quad -\oint \underline{\Gamma^{i}_{st} A^{s}}\, d\xi^t.$$

Подчеркивание величин под знаком интеграла указывает на то, что эти величины следует брать для последовательных точек контура (а не для начальной точки $\xi^t = 0$).

Вычислим сначала в самом низшем приближении значение $\underline{A}^i$ для произвольной точки ξ^t контура. Это приближение получается при замене в интеграле, взятом теперь по незамкнутому пути, величин $\underline{\Gamma}^i_{st}$ и $\underline{A}^s$ на величины Γ^i_{st} и A^s для начальной точки интегрирования ($\xi^t = 0$). Интегрирование тогда дает

$$\underline{A}^i = A^i - \Gamma^i_{st} A^s \int d\xi^t = A^i - \Gamma^i_{st} A^s \xi^t.$$

В этом выражении мы пренебрегли членами второго или более высокого порядка по ξ. В том же приближении мы получим немедленно

$$\underline{\Gamma}^i_{st} = \Gamma^i_{st} + \Gamma^i_{st,r} \xi^r.$$

Подставляя эти выражения в интеграл и выбирая соответствующим образом индексы, по которым производится суммирование, мы получаем сначала

$$-\oint \left(\Gamma^i_{st} + \Gamma^i_{st,q} \xi^q\right)\left(A^s - \Gamma^s_{pq} A^p \xi^q\right) d\xi^t,$$

где все величины, за исключением ξ, следует брать для начальной точки интегрирования. Затем мы находим

$$-\Gamma^i_{st} A^s \oint d\xi^t - \Gamma^i_{st,q} A^s \oint \xi^q \, d\xi^t + \Gamma^i_{st} \Gamma^s_{pq} A^p \oint \xi^q \, d\xi^t,$$

где интегрирование производится по замкнутому контуру. (Первый член обращается в нуль, так как интеграл от него равен нулю.) Член, пропорциональный $(\xi)^2$, здесь опущен как величина высшего порядка. Два других члена можно объединить:

$$\left[-\Gamma^i_{pt,q} + \Gamma^i_{st} \Gamma^s_{pq}\right] A^p \oint \xi^q \, d\xi^t.$$

Это и есть изменение ΔA^i вектора A^i после переноса вдоль контура. Мы имеем

$$\oint \xi^q \, d\xi^t = \oint d(\xi^q \xi^t) - \oint \xi^t \, d\xi^q = -\oint \xi^t \, d\xi^q.$$

Таким образом, этот интеграл является антисимметричным по t и q, и, кроме того, он обладает тензорным характером. Обозначим его через $f^{\overset{tq}{\vee}}$. Если бы $f^{\overset{tq}{\vee}}$ был *произвольным* тензором, то векторный характер величины ΔA^i приводил бы к следствию, что выражение в скобках в предпоследней формуле имеет тензорный характер. В действительности же мы можем сделать вывод о тензорном характере выражения в скобках только в том случае, если оно будет антисимметризовано по t и q. Тогда из него получится тензор кривизны

$$R^i_{klm} \equiv \Gamma^i_{kl,m} - \Gamma^i_{km,l} - \Gamma^i_{sl}\Gamma^s_{km} + \Gamma^i_{sm}\Gamma^s_{kl}. \qquad \text{(III.4)}$$

При этом положение всех индексов фиксируется. Свертывая по индексам i и m, мы получим свернутый тензор кривизны

$$R_{ik} \equiv \Gamma^s_{ik,s} - \Gamma^s_{is,k} - \Gamma^s_{it}\Gamma^t_{sk} + \Gamma^s_{ik}\Gamma^t_{st}. \qquad \text{(III.4a)}$$

λ-преобразование

Кривизна обладает свойством, которое будет иметь важное значение в последующем. Для поля смещений Γ можно определить новые величины Γ^* по формуле

$$\Gamma^{l*}_{ik} = \Gamma^l_{ik} + \delta^l_i \lambda_{,k}, \qquad \text{(III.25)}$$

где λ есть произвольная функция координат и δ^l_i есть тензор Кронеккера («λ-преобразование»). Если образовать R^i_{klm} (Γ^*) заменяя Γ^* на правую часть уравнения (III.25), то λ сокращается так, что

$$R^i_{klm}(\Gamma^*) = R^i_{klm}(\Gamma)$$

и (III.6)

$$R_{ik}(\Gamma^*) = R_{ik}(\Gamma).$$

Кривизна инвариантна относительно λ-преобразования («λ-инвариантность»). Следовательно, теория, содержащая Γ только в выражении для тензора кривизны, определяет поле Γ не полностью, а только с точностью до функции λ, остающейся произвольной. В подобной теории Γ и Γ^* следует рассматривать как представления одного поля таким образом, как если бы величина Γ^* получалась из Γ просто преобразованием координат.

Следует отметить, что λ-преобразование, в противоположность преобразованию координат, порождает несимметричные величины Γ^* из симметричных по индексам i и k величин Γ. В такой теории условие симметрии для Γ теряет свой объективный смысл.

Основное значение λ-инвариантности определяется тем, что она, как мы увидим позднее, влияет на «жесткость» системы уравнений поля.

Требование «инвариантности относительно транспонирования»

Вводя несимметричные поля, мы встречаем следующую трудность. Если Γ^l_{ik} означает поле смещений, то $\widetilde{\Gamma}^l_{ik}$ $(= \Gamma^l_{ki})$ тоже будет полем смещений. Если g_{ik} есть тензор, то $\widetilde{g}_{ik}$ $(= g_{ki})$ также является тензором. Это ведет к большому числу ковариантных образований, из которых невозможно сделать выбор на основании одного только принципа относительности. Мы продемонстрируем эту трудность на примере и покажем, как можно преодолеть ее естественным образом.

В теории симметричного поля важную роль играет тензор

$$(W_{ikl} \equiv)\, g_{ik,l} - g_{sk}\Gamma^s_{il} - g_{is}\Gamma^s_{lk}.$$

Приравнивая его нулю, мы получаем уравнение, позволяющее выразить величины Γ через g, т. е. исключить Γ. Пользуясь тем, что, как показано ранее,

1) выражение $A^i_{;l} = A^i_{,l} + A^s\Gamma_{sl}$ есть тензор, и что 2) произвольный контравариантный тензор может быть представлен в виде $\sum\limits_t \underset{(t)}{A^i} \underset{(t)}{B^k}$, можно без труда доказать, что написанное выше выражение имеет тензорный характер и в том случае, если поля g и Γ уже не будут симметричными.

Но в последнем случае тензорный характер сохраняется, если, к примеру, в последнем члене Γ^s_{lk} транспонируется, т. е. заменяется на Γ^s_{kl} (это следует из того факта, что выражение $g_{is}(\Gamma^s_{kl} - \Gamma^s_{lk})$ есть тензор). Существуют и другие, хотя и не такие простые, образования, сохраняющие тензорный характер, которые можно считать обобщением рассматриваемого выражения на случай несимметричного поля. Следовательно, если мы захотим обобщить на несимметричные поля соотношение между величинами g и Γ, получаемое приравниванием нулю написанного выше выражения, то это, по-видимому, внесет произвол при выборе поля.

Но рассматриваемое образование обладает свойством, отличающим его от всех других возможных образований. Если одновременно заменить g_{ik} на $\widetilde{g}_{ik}$ и Γ^l_{ik} на $\widetilde{\Gamma}^l_{ik}$ и затем переставить индексы i и k, это образование переходит само в себя. Оно является «симметричным относительно транспонирования» по индексам i и k. Уравнение, получаемое приравниванием этого выражения нулю, является «инвариантным относительно транспонирования». В случае симметричных g и Γ это условие, разумеется, также удовлетворяется; оно служит обобщением требования того, чтобы полевые величины были симметричны.

Для уравнений несимметричного поля мы постулируем, что они должны обладать *инвариантностью относительно транспонирования.* Я полагаю, что этот постулат, с физической точки зрения, соответствует требованию, чтобы положительные и отрицательные электрические заряды входили в законы физики симметрично.

Взгляд на уравнение (III.4а) показывает, что тензор R_{ik} является не вполне инвариантным относительно транспонирования, поскольку при транспонировании он переходит в

$$(R^*_{ik} =) \Gamma^s_{ik,s} - \Gamma^s_{sk,i} - \Gamma^s_{it}\Gamma^t_{sk} + \Gamma^s_{ik}\Gamma^t_{ts}. \qquad \text{(III.4б)}$$

Это обстоятельство и лежит в основе трудностей, с которыми мы сталкиваемся, пытаясь установить уравнения поля, инвариантные относительно транспонирования.

Псевдотензор U^l_{ik}

Оказывается, что из R_{ik} можно образовать симметричный относительно транспонирования тензор, введя вместо Γ^l_{ik} несколько отличающийся псевдотензор U^l_{ik}. В уравнении (III.4а) два линейных по Γ члена формально можно объединить в один. Заменим $\Gamma^s_{ik,s} - \Gamma^s_{is,k}$ на $(\Gamma^s_{ik} - \Gamma^t_{it}\delta^a_k)_{,s}$ и определим новый псевдотензор U^l_{ik} уравнением

$$U^l_{ik} \equiv \Gamma^l_{ik} - \Gamma^t_{it}\delta^l_k. \qquad \text{(III.7)}$$

Поскольку, как следует из уравнения (III.7) в результате свертывания по k и l,

$$U^t_{it} = -3\Gamma^t_{it},$$

мы получаем для Γ следующее выражение

$$\Gamma^l_{ik} = U^l_{ik} - \frac{1}{3}U^t_{it}\delta^l_k. \qquad \text{(III.7а)}$$

Подставляя это выражение в (III.4а), находим для свернутого тензора кривизны выражение через U:

$$S_{ik} \equiv U^s_{ik,s} - U^s_{it}U^t_{sk} + \frac{1}{3}U^s_{is}U^t_{tk}. \qquad \text{(III.8)}$$

Но это выражение симметрично относительно транспонирования. Именно это обстоятельство и придает псевдотензору U такое значение для теории несимметричных полей.

λ-Преобразование для U. Заменяя в уравнении (III.25) Γ на U, мы получаем после простого вычисления

$$U_{ik}^{l^*} = U_{ik}^{l} + \left(\delta_i^l \lambda_{,k} - \delta_k^l \lambda_{,i}\right). \qquad \text{(III.9)}$$

Это уравнение определяет λ-преобразование для U. Выражение (III.8) инвариантно по отношению к этому преобразованию $\left(S_{ik}(v^*) = S_{ik}(v)\right)$.

Закон преобразования для U. Заменяя в уравнениях (III.3) и (III.3a) величины Γ на U с помощью формулы (III.7a), мы получаем

$$U_{ik}^{l^*} = \frac{\partial x^{l^*}}{\partial x^l}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i^*}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k^*}} U_{ik}^{l} + \\ + \frac{\partial x^{l^*}}{\partial x^s}\frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{i^*}\,\partial x^{k^*}} - \delta_{k^*}^{l^*}\frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^s}\frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{i^*}\,\partial x^{t^*}}. \qquad \text{(III.10)}$$

Заметим, что опять индексы, относящиеся к обеим системам, пробегают все значения от 1 до 4 независимо друг от друга, даже если они обозначаются одной буквой. Рассматривая эту формулу, следует отметить, что из-за наличия последнего члена она несимметрична относительно перестановок индексов i и k. Это обстоятельство можно обнаружить, рассматривая преобразование как произведение симметричного относительно транспонирования преобразования координат и λ-преобразования. Запишем сначала последний член в виде

$$-\frac{1}{2}\left[\delta_{k^*}^{l^*}\frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^s}\frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{i^*}\,\partial x^{t^*}} + \delta_{i^*}^{l^*}\frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^s}\frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{k^*}\,\partial x^{t^*}}\right] + \\ + \frac{1}{2}\left[\delta_{i^*}^{l^*}\frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^s}\frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{k^*}\,\partial x^{t^*}} - \delta_{k^*}^{l^*}\frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^s}\frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{i^*}\,\partial x^{t^*}}\right]. \qquad \text{(III.10a)}$$

Первое из этих выражений является симметричным относительно транспонирования. Объединим его с первыми двумя членами правой части уравнения (III.10) в одно выражение $K_{ik}^{l^*}$. Рассмотрим теперь, что получается, если вслед за преобразованием

$$U_{ik}^{l^*} = K_{ik}^{l^*}$$

мы совершаем λ-преобразование

$$U_{ik}^{l^{**}} = U_{ik}^{l^*} + \delta_{i*}^{l^*}\lambda_{,k^*} - \delta_{k^*}^{l^*}\lambda_{,i^*}.$$

В результате получаем

$$U_{ik}^{l^{**}} = K_{ik}^{l^*} + \left(\delta_{i*}^{l^*}\lambda_{,k^*} - \delta_{k^*}^{l^*}\lambda_{,i^*}\right).$$

Это значит, что (III.10) можно рассматривать как произведение двух преобразований, если второй член уравнения (III.10a) можно привести к виду $\delta_{ik}^{l^*}\lambda_{,k^*} - \delta_{k^*}^{l^*}\lambda_{,i^*}$. Для этого достаточно показать, что существует такая функция λ, что

$$\frac{1}{2}\frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^s}\frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{k^*}\,\partial x^{t^*}} = \lambda_{,i^*}$$
$$\left(\text{и } \frac{1}{2}\frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^s}\frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{i^*}\,\partial x^{t^*}} = \lambda_{,i^*}\right). \qquad \text{(III.11)}$$

Чтобы преобразовать левую часть гипотетического пока уравнения, необходимо сначала выразить $\frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^s}$ через коэффициенты обратного преобразования $\frac{\partial x^a}{\partial x^{b^*}}$. С одной стороны,

$$\frac{\partial x^p}{\partial x^{t^*}}\frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^s} = \delta_s^p, \qquad \text{(III.a)}$$

с другой —

$$\frac{\partial x^p}{\partial x^{t^*}}V_{t*}^s = \frac{\partial x^p}{\partial x^{t^*}}\frac{\partial D}{\partial\left(\frac{\partial x^s}{\partial x^t}\right)} = D\delta_s^p.$$

Здесь $V_{t\cdot}^{s}$ означает сомножитель при $\dfrac{\partial x^s}{\partial x^{t^*}}$, который, в свою очередь, может быть выражен как производная определителя $D = \left|\dfrac{\partial x^a}{\partial x^{b^*}}\right|$ по $\dfrac{\partial x^s}{\partial x^{t^*}}$. Следовательно, мы имеем также

$$\frac{\partial x^p}{\partial x^{t^*}} \frac{\partial \ln D}{\partial\left(\dfrac{\partial x^s}{\partial x^{t^*}}\right)} = \delta_s^p. \tag{III.б}$$

Из выражений (III.а) и (III.б) следует, что

$$\frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^s} = \frac{\partial \ln D}{\partial\left(\dfrac{\partial x^s}{\partial x^{t^*}}\right)}.$$

Вследствие этого соотношения левую часть уравнения (III.4) можно записать в виде

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \ln D}{\partial\left(\dfrac{\partial x^s}{\partial x^{t^*}}\right)}\left(\frac{\partial x^s}{\partial x^{t^*}}\right)_{,k^*} = \frac{1}{2}\frac{\partial \ln D}{\partial x^{k^*}}.$$

Это значит, что уравнение (III.11) действительно удовлетворяется, если

$$\lambda = \frac{1}{2}\ln D.$$

Это доказывает, что преобразование (III.10) можно рассматривать как произведение симметричного относительно транспонирования преобразования

$$U_{ik}^{l^*} = \frac{\partial x^{l^*}}{\partial x^l}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i^*}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k^*}}U_{ik}^{l} + \frac{\partial x^{l^*}}{\partial x^s}\frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{i^*}\,\partial x^{k^*}} -$$
$$- \frac{1}{2}\left[\delta_{k^*}^{l^*}\frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^s}\frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{i^*}\,\partial x^{t^*}} + \delta_{t^*}^{l^*}\frac{\partial x^{t^*}}{\partial x^s}\frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{k^*}\,\partial x^{t^*}}\right] \tag{III.10б}$$

и λ-преобразования. Таким образом, в качестве формулы преобразования для U вместо (III.10) можно взять (III.10б). Всякое преобразование поля U, изменяющее только форму представления, можно выразить в виде произведения преобразования координат по формуле (III.10б) и λ-преобразования.

Вариационный принцип и уравнения поля

Вывод уравнений поля из вариационного поля имеет то преимущество, что обеспечивается совместность получаемой системы уравнений и что тождества, связанные с общей ковариантностью — тождества Бианки, — а также законы сохранения выводятся систематическим путем.

Варьируемый интеграл должен содержать скалярную плотность $\mathfrak{H}$. Мы построим эту плотность из R_{ik} или S_{ik}. Простейший способ состоит в том, чтобы ввести ковариантную тензорную плотность $\mathfrak{g}^{ik}$ с весом 1 в дополнение к Γ или U соответственно, полагая

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{g}^{ik} R_{ik} (= \mathfrak{g}^{ik} S_{ik}). \tag{III.12}$$

Для $\mathfrak{g}^{ik}$ должен выполняться следующий закон преобразования:

$$\mathfrak{g}^{ik^*} = \frac{\partial x^{i^*}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{k^*}}{\partial x^k} \mathfrak{g}^{ik} \left| \frac{\partial x^t}{\partial x^{t^*}} \right|, \tag{III.13}$$

где опять индексы, относящиеся к разным системам координат, несмотря на применение одних и тех же букв, следует считать взаимно независимыми. Действительно, мы получаем

$$\int \mathfrak{H}^* \, d\tau^* =$$

$$= \int \frac{\partial x^{i^*}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{k^*}}{\partial x^k} \mathfrak{g}^{ik} \left| \frac{\partial x^t}{\partial x^{t^*}} \right| \frac{\partial x^s}{\partial x^{i^*}} \frac{\partial x^t}{\partial x^{k^*}} S_{st} \left| \frac{\partial x^{r^*}}{\partial x^r} \right| d\tau = \int \mathfrak{H} \, d\tau,$$

т. е. что интеграл инвариантен относительно преобразования. Кроме того, интеграл инвариантен относительно λ-преобразования (III.25) или (III.9), так как тензор R_{ik}, выраженный соответственно через Γ или U, а следовательно, и $\mathfrak{H}$ является инвариантным относительно λ-преобразования. Отсюда следует, что уравнения поля, получаемые варьированием $\int \mathfrak{H}\, d\tau$, являются ковариантными по отношению к'преобразованию координат и λ-преобразованию.

Но мы постулировали также, что уравнения поля должны быть инвариантными относительно транспонирования двух полей $\mathfrak{g}$, Γ или полей $\mathfrak{g}$, U. Этот постулат выполняется, если инвариантностью относительно транспонирования обладает подынтегральная функция $\mathfrak{H}$. Мы видели, что тензор R_{ik} симметричен относительно транспонирования, если он выражен через U, но не через Γ. Следовательно, функция $\mathfrak{H}$ будет инвариантной относительно транспонирования только в том случае, если в качестве переменных поля в дополнение к $\mathfrak{g}^{ik}$ мы введем величины U (но не Γ). В этом случае мы с самого начала гарантируем, что уравнения поля, получаемые варьированием $\int \mathfrak{H}\, d\tau$, будут инвариантными относительно транспонирования.

Варьируя $\mathfrak{H}$ [уравнения (III.12) и (III.8)] по $\mathfrak{g}$ и U, мы находим

$$\delta\mathfrak{H} = S_{ik}\delta\mathfrak{g}^{ik} - \mathfrak{R}_l^{ik}\delta U_{ik}^l + \left(\mathfrak{g}^{ik}\delta U_{ik}^s\right)_{,s},$$

где

$$\left.\begin{aligned} S_{ik} &= U_{ik,s}^s - U_{it}^s U_{sk}^t + \frac{1}{3}U_{is}^s U_{tk}^t, \\ \mathfrak{R}_l^{ik} &= \mathfrak{g}_{,l}^{ik} + \mathfrak{g}^{sk}\left(U_{sl}^i - \frac{1}{3}U_{st}^t\delta_l^i\right) + \\ &\qquad + \mathfrak{g}^{is}\left(U_{ls}^k - \frac{1}{3}U_{ts}^t\delta_l^k\right). \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III.14)}$$

Уравнения поля

Наш вариационный принцип гласит:

$$\delta\left(\int \mathfrak{H}\, d\tau\right) = 0. \qquad \text{(III.15)}$$

Величины $\mathfrak{g}_{ik}$ и U^l_{ik} варьируются независимо, и их вариации на границе области интегрирования обращаются в нуль. Варьирование прежде всего дает

$$\int \delta\mathfrak{H}\, d\tau = 0.$$

Подставляя сюда выражение (III.14), находим, что последний член в выражении для $\delta\mathfrak{H}$ не вносит в интеграл ничего, так как вариации δU^l_{ik} на границах исчезают. Итак, мы получаем уравнения поля

$$S_{ik} = 0, \qquad \text{(III.16a)}$$

$$\mathfrak{R}^{ik}_l = 0. \qquad \text{(III.16б)}$$

Эти уравнения — как уже ясно из выбора вариационного принципа — являются инвариантными относительно преобразования координат, λ-преобразования и транспонирования.

Тождества

Эти уравнения поля не независимы одно от другого. Между ними имеется $4+1$ тождеств. Другими словами, существуют $4+1$ уравнений между их левыми частями, выполняющихся независимо от того, удовлетворяет поле $\mathfrak{g}$ и U уравнениям поля или нет.

Эти тождества можно получить хорошо известным методом из того факта, что интеграл $\int \mathfrak{H}\, d\tau$ является инвариантным относительно преобразования координат и λ-преобразования.

Из инвариантности интеграла $\int \mathfrak{H}\, d\tau$ следует, что его вариация обращается в нуль *тождественно*, если подставить в $\delta\mathfrak{H}$ вариации $\delta\mathfrak{g}$ и δU, возникающие в результате бесконечно малого преобразования координат или бесконечно малого λ-преобразования соответственно.

Бесконечно малое преобразование координат описывается формулой

$$x^{i^*} = x^i + \xi^i, \qquad \text{(III.17)}$$

где ξ^i означает произвольный бесконечно малый вектор. Теперь мы должны выразить вариации $\delta\mathfrak{g}^{ik}$ и δU^l_{ik} через ξ^i с помощью уравнений (III.13) и (III.10б). В соответствии с уравнением (III.17) следует заменить

$$\frac{\partial x^{a^*}}{\partial x^b} \text{ на } \delta^a_b + \xi^a_{,b}, \qquad \frac{\partial x^a}{\partial x^{b^*}} \text{ на } \delta^a_b - \xi^a_{,b}$$

и опустить все члены выше первого порядка по ξ. В результате получим:

$$\delta\mathfrak{g}^{ik}(= \mathfrak{g}^{ik^*} - \mathfrak{g}^{ik}) =$$
$$= \mathfrak{g}^{sk}\xi^i_{,s} + \mathfrak{g}^{is}\xi^k_{,s} - \mathfrak{g}^{ik}\xi^s_{,s} + \left[-\mathfrak{g}^{ik}_{,s}\xi^s\right], \qquad \text{(III.13a)}$$

$$\delta U^l_{ik}(= U^{l^*}_{ik} - U^l_{ik}) =$$
$$= U^s_{ik}\xi^l_{,s} - U^l_{,i} - U^l_{is}\xi^s_{,k} + \xi^l_{,ik} + \left[-U^l_{ik,k}\xi^s\right]. \qquad \text{(III.10в)}$$

Сделаем следующее замечание. Формулы преобразования устанавливают новые значения переменных поля *для одной и той же точки континуума*. Вычисления, кратко описанные выше, дают сначала выражения для $\delta\mathfrak{g}^{ik}$ и δU^l_{ik} без членов в скобках. С другой стороны, при варьировании символы $\delta\mathfrak{g}^{ik}$ и δU^l_{ik} означают вариации *для фиксированных значений координат*. Чтобы получить эти вариации, необходимо прибавить члены в скобках.

При подстановке этих «трансформационных вариаций» $\delta\mathfrak{g}$ и δU вариация интеграла $\int \mathfrak{H}\, d\tau$ обращается в нуль тождественно. Если, кроме того, выбрать векторы ξ^i так, чтобы они (вместе со своими первыми производными) обращались в нуль на границе области интегрирования, то последний член в уравнении (III.14) не даст никакого вклада. Поэтому интеграл

$$\int \left(S_{ik}\delta\mathfrak{g}^{ik} - \mathfrak{R}_l^{ik}\delta U_{ik}^l\right) d\tau$$

обращается в нуль тождественно, если вариации $\delta\mathfrak{g}^{ik}$ и δU_{ik}^l заменяются выражениями (III.13а) и (III.10в). Поскольку этот интеграл является линейной однородной функцией векторов ξ^i и их производных, он может быть приведен к виду

$$\int \mathfrak{M}_i \xi^i \, d\tau$$

повторным интегрированием, по частям, причем $\mathfrak{M}_i$ обозначает известное выражение (первого порядка по S_{ik} и второго порядка по $\mathfrak{R}_l^{ik}$). Отсюда следуют тождества

$$\mathfrak{M}_i \equiv 0. \tag{III.18}$$

Четыре тождества для S_{ik} и $\mathfrak{R}_l^{ik}$ соответствуют тождествам Бианки. В соответствии с введенной ранее терминологией эти тождества принадлежат третьему порядку.

Существует пятое тождество, соответствующее инвариантности интеграла $\int \mathfrak{H} \, d\tau$ по отношению к бесконечно малому λ-преобразованию. В этом случае в уравнение (III.14) мы должны подставить

$$\delta\mathfrak{g}^{ik} = 0, \quad \delta U_{ik}^l = \delta_i^l \lambda_{,k} - \delta_k^l \lambda_{,i},$$

где λ — бесконечно малая величина, исчезающая на границе области интегрирования. Сначала получаем

$$\int \mathfrak{R}_l^{ik}\left(\delta_i^l \lambda_{,k} - \delta_k^l \lambda_{,i}\right) dt = 0,$$

или, после интегрирования по частям,

$$2\int \mathfrak{R}^{\underset{\vee}{is}}_{s,i}\lambda\, d\tau = 0$$

$\left(\text{где, вообще, } \mathfrak{R}^{\underset{\vee}{ik}}_{l} = \frac{1}{2}(\mathfrak{R}^{ik}_{l} - \mathfrak{R}^{ki}_{l})\right)$.

Это дает искомое тождество

$$\mathfrak{R}^{\underset{\vee}{is}}_{s,i} \equiv 0. \qquad \text{(III.19)}$$

По нашей терминологии это тождество второго порядка. Для $\mathfrak{R}^{\underset{\vee}{is}}_{s}$ непосредственным вычислением из уравнения (III.14) получаем

$$\mathfrak{R}^{\underset{\vee}{is}}_{s} \equiv \mathfrak{g}^{\underset{\vee}{is}}_{,s}. \qquad \text{(III.19a)}$$

Таким образом, если уравнение поля (III.16б) удовлетворяется, то

$$\mathfrak{g}^{\underset{\vee}{is}}_{,s} = 0. \qquad \text{(III.16в)}$$

Замечание о физической интерпретации. Сравнение с теорией электромагнитного поля Максвелла наводит на мысль, что уравнение (III.16в) выражает равенство нулю плотности магнитного тока. Если принять эту интерпретацию, то станет очевидным, какое выражение должно означать плотность электрического тока. Тензорной плотности $\mathfrak{g}^{ik}$ можно сопоставить тензор g^{ik} по формуле

$$\mathfrak{g}^{ik} = g^{ik}\sqrt{-|g_{st}|}, \qquad \text{(III.20)}$$

где ковариантный тензор g_{ik} связывается с контравариантным тензором уравнениями

$$g_{is}g^{ks} = \delta^k_i. \qquad \text{(III.21)}$$

Из этих двух уравнений получаем

$$g^{ik} = \mathfrak{g}^{ik}\left(-|\mathfrak{g}^{st}|\right)^{-\frac{1}{2}}$$

и затем g_{ik} — из уравнений (III.21). Далее мы можем предположить, что уравнение

$$(a_{ikl}) = g_{\underset{\vee}{ik},l} + g_{\underset{\vee}{kl},i} + g_{\underset{\vee}{li},k}, \tag{III.22}$$

или

$$\mathfrak{a}^m = \frac{1}{6}\eta^{iklm}a_{ikl}, \tag{III.22a}$$

выражает плотность тока, причем η^{iklm} означает тензорную плотность Леви-Чивиты (с компонентами ± 1), антисимметричную по всем индексам. Дивергенция этой величины равна нулю тождественно.

Жесткость системы уравнений (III.16а), (III.16б)

Применяя здесь описанный выше метод вычислений, мы должны учитывать, что все величины U^*, получаемые из заданной величины U с помощью λ-преобразований вида (III.9), в действительности представляют одно и то же поле U. Вследствие этого коэффициенты n-го порядка в разложении U^l_{ik} включают $\binom{4}{n}$ производных λ n-го порядка, выбор которых не имеет значения для действительно различных полей U. Таким образом число коэффициентов разложения, существенных для определения полей U, уменьшается на $\binom{4}{n}$. Используя наш метод вычислений, мы получаем для числа свободных коэффициентов n-го порядка выражение

$$\begin{aligned} z = \left[16\binom{4}{n} + 64\binom{4}{n-1} - 4\binom{4}{n+1} - \binom{4}{n}\right] - \\ - \left[16\binom{4}{n-2} + 64\binom{4}{n-1}\right] + \\ + \left[4\binom{4}{n-3} + \binom{4}{n-2}\right]. \end{aligned} \tag{III.23}$$

Первые скобки дают полное число соответствующих коэффициентов n-го порядка, характеризующих поле U, вторые скобки показывают уменьшение этого числа вследствие существования уравнений поля, а третьи скобки означают поправку к этому уменьшению, обусловленную тождествами (III.18), (III.19). Вычисляя асимптотическое значение для больших n, находим

$$z \sim \binom{4}{n} \frac{z_1}{n}, \qquad \text{(III.23a)}$$

где $z_1 = 42$.

Следовательно, уравнения несимметричного поля оказываются значительно более слабыми, чем уравнения чисто гравитационного поля ($z_1 = 12$).

Влияние λ-инвариантности на жесткость системы уравнений. Можно попытаться построить теорию, инвариантную относительно транспонирования, отправляясь от выражения, инвариантного относительно транспонирования,

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{2}(\mathfrak{g}^{ik} R_{ik} + \tilde{\mathfrak{g}}^{ik} \tilde{R}_{ik})$$

(вместо того чтобы вводить в качестве переменных поля U). Конечно. получаемая при этом теория будет отличаться от изложенной выше. Можно показать, что эта функция $\mathfrak{H}$ не является λ-инвариантной. Здесь мы также получаем уравнения поля типа (III.16а), (III.16б), инвариантные относительно транспонирования $\mathfrak{g}$ и Γ. Между ними, однако, существуют только четыре тождества Бианки. Применяя к этой системе метод вычислений, мы обнаружим, что в формуле, соответствующей (III.23), отсутствуют четвертый член в первых скобках и второй член в третьих скобках. Получаем

$$z_1 = 48.$$

Следовательно, эта система уравнений слабее, чем наша, и поэтому должна быть отвергнута.

Сравнение с прежней системой уравнений поля. Она гласит:

$$\Gamma^{s}_{\underset{\vee}{is}} = 0, \qquad R_{\underline{ik}} = 0,$$

$$g_{ik,l} - g_{sk}\Gamma^{s}_{il} - g_{is}\Gamma^{s}_{lk} = 0, \quad R_{\underset{\vee}{ik},l} + R_{\underset{\vee}{kl},i} + R_{\underset{\vee}{li},k} = 0,$$

где тензор R_{ik} как функция Γ определяется уравнением (III.4a) и где

$$R_{\underline{ik}} = \frac{1}{2}(R_{ik} + R_{ki}), \quad R_{\underset{\vee}{ik}} = \frac{1}{2}(R_{ik} - R_{ki})\Big].$$

Эта система полностью эквивалентна новой системе (III.16а), (III.16б), так как она получена варьированием того же интеграла. Она инвариантна относительно транспонирования g_{ik} и Γ^{l}_{ik}. Разница, однако, заключается в том, что ни сам варьируемый интеграл, ни система уравнений, получаемая при его варьировании, не инвариантны относительно транспонирования. Однако она инвариантна по отношению к λ-преобразованиям (III.25). Чтобы добиться инвариантности относительно транспонирования, следует применить искусственный прием. Введем формально четыре новых переменных поля λ_i и выберем[4] их после варьирования так, чтобы удовлетворялись уравнения $\Gamma^{s}_{\underset{\vee}{is}} = 0$.

Таким образом уравнения, полученные варьированием по Γ, приводятся к указанному виду, инвариантному относительно транспонирования. Но уравнения для R_{ik} все еще содержат вспомогательные переменные λ_i. Однако их можно исключить, что приведет к разложению этих уравнений в ряд указанным выше способом. Получаемые в результате уравнения также будут инвариантными относительно транспонирования по отношению к g и Γ).

---

[4]Полагая $\Gamma^{l*}_{ik} = \Gamma^{l}_{ik} + \delta^{l}_{i}\lambda_k$.

Постулирование уравнений $\Gamma^{s}_{\underset{\vee}{is}} = 0$ приводит к нормировке Г-поля, устраняющей λ-инвариантность системы уравнений. В результате не все эквивалентные представления Г-поля оказываются решениями этой системы. То, что происходит при этом, можно сравнить с процессом присоединения к уравнениям чисто гравитационного поля произвольных дополнительных уравнений, ограничивающих выбор координат. К тому же в нашем случае уравнения становятся излишне усложненными. Эти трудности не появляются в новом представлении, получаемом из вариационного принципа, инвариантного относительно транспонирования по отношению к $\mathfrak{g}$ и U, причем в качестве переменных поля всюду следует применить $\mathfrak{g}$ и U.

Закон дивергенции и закон сохранения импульса и энергии

Если удовлетворяются уравнения поля и, кроме того, вариация является результатом λ-преобразования, то в уравнении (III.14) обращаются в нуль не только S_{ik} и $\mathfrak{R}^{ik}_{l}$, но и $\delta\mathfrak{H}$, так что уравнения поля имеют своим следствием

$$\left(\mathfrak{g}^{ik}\delta U^{s}_{ik}\right)_{,s} = 0,$$

где δU^{s}_{ik} определяются уравнением (III.10в). Этот закон дивергенции выполняется для произвольно выбранного вектора ξ^{i}. Простейший конкретный выбор, когда ξ^{i} не зависит от x, дает четыре уравнения:

$$\mathfrak{T}^{s}_{t,s} \equiv \left(\mathfrak{g}^{ik}U^{s}_{ik,t}\right)_{,s} = 0.$$

Эти уравнения можно интерпретировать и применять в качестве уравнений сохранения импульса и энергии. Следует отметить, что эти уравнения сохранения определяются системой уравнений поля не единственным образом. Интересно отметить, что в соответствии с уравнениями

$$\mathfrak{T}_i^s \equiv \mathfrak{g}^{ik} U_{ik,t}^s$$

плотность потока энергии ($\mathfrak{T}_4^1$, $\mathfrak{T}_4^2$, $\mathfrak{T}_4^3$), а также плотность энергии $\mathfrak{T}_4^4$, исчезают для поля, независимого от x^4. Уже отсюда можно заключить, что согласно этой теории стационарное поле, не содержащее особенностей, не может представлять массу, отличную от нуля.

Вывод, а также вид законов сохранения становится намного сложнее, чем в том случае, когда мы использовали уравнения поля в прежней формулировке.

§ 3. Общие замечания

А. С моей точки зрения, изложенная здесь теория является логически простейшей релятивистской теорией поля, возможной вообще. Но это не значит, что природа не может подчиняться более сложным теориям поля.

Более сложные теории поля предлагались часто. Их можно классифицировать по следующим характерным признакам.

а) Увеличение числа измерений континуума. В этом случае необходимо объяснить, почему континуум *очевидным образом* ограничен четырьмя измерениями;

б) Введение полей иного рода (например, векторного поля) в дополнение к полю смещений и тензорному полю g_{ik} (или $\mathfrak{g}^{ik}$);

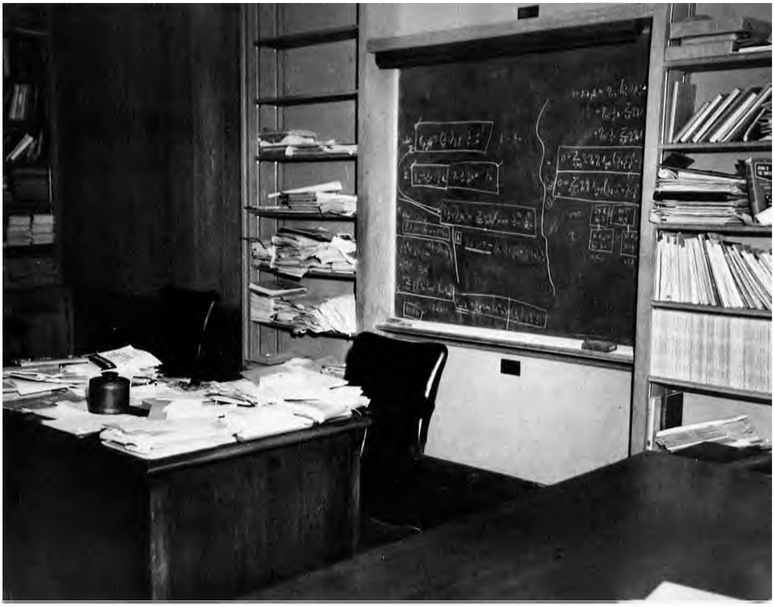
в) Введение уравнений поля высшего порядка (в смысле дифференцирования).

На мой взгляд подобные более сложные теории и их комбинации следует рассматривать только в том случае, если для этого будут существовать физические причины, основанные на эксперименте.

Б. Теория поля еще не вполне определяется системой уравнений поля. Надо ли признавать наличие сингулярностей? Следует ли постулировать граничные условия? Что касается первого вопроса, то мое мнение заключается в следующем: сингулярности должны быть исключены. Мне не кажется разумным вводить в теорию континуума точки (или линии и т.п.), для которых уравнения поля не выполняются. Кроме того, введение сингулярностей эквивалентно постулированию граничных условий (произвольных с точки зрения уравнений поля) на «поверхностях», окружающих сингулярности. Без такого постулата теория будет слишком неопределенной. Ответ на второй вопрос, по-моему, заключается в том, что постулирование граничных условий является обязательным. Я продемонстрирую это на элементарном примере. Можно сравнить постулат о потенциале вида $\varphi = \sum \frac{m}{r}$ с утверждением, что вне материальных точек (в трех измерениях) выполняется уравнение $\Delta\varphi = 0$. Но если не прибавить граничное условие, согласно которому φ обращается в нуль (или остается конечным) на бесконечности, то будут существовать решения, представляющие собой целые функции x [например, $x_1^2 - 1/2(x_2^2 + x_3^2)$] неограниченно возрастающие на бесконечности. Исключить такие поля можно, только постулируя граничное условие в случае, если пространство «открытое».

В. Можно ли думать, что теория поля позволит понять атомистическую и квантовую структуру реальности? Почти каждый ответит на этот вопрос «нет». Но я полагаю, что по этому поводу в настоящее время никому не известно ничего достоверного, поскольку мы не знаем, каким образом и в какой степени исключение сингулярностей сокращает множество решений. У нас вообще нет никакого метода для систематического получения решений, свободных от сингулярностей. Приближенные методы здесь не идут в счет, так как никогда не известно, существует ли для частного приближенного решения точное решение, свободное от сингулярностей. По этой причине мы не можем в настоящее время сравнивать с опытом содержание нелинейной теории поля. Здесь может помочь только существенный прогресс в математических методах. В настоящее время преобладает мнение, что теорию поля сначала необходимо перевести «квантованием» в статистическую теорию вероятностей, следуя более или менее установленным правилам. Я вижу в этом лишь попытку описывать линейными методами соотношения существенно нелинейного характера.

Г. Можно убедительно доказать, что реальность вообще не может быть представлена непрерывным полем. Из квантовых явлений, по-видимому, следует, что конечная система с конечной энергией может полностью описываться набором чисел (квантовых чисел). Это, кажется, нельзя совместить с теорией континуума и требует для описания реальности чисто алгебраической теории. Однако сейчас никто не знает, как найти основу для такой теории.



A. Einstein.

Альберт Эйнштейн

ПРИНСТОНСКИЕ ЛЕКЦИИ

Дизайнер М. В. Ботя
Технический редактор А. В. Широбоков
Корректор М. А. Ложкина

Подписано в печать 09.07.02. Формат 80 × $100^1/_{32}$.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 20,72. Уч. изд. л. 19,12.
Гарнитура Балтика. Бумага офсетная №1.
Тираж 1000 экз. Заказ №

АНО «Институт компьютерных исследований»
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
Лицензия на издательскую деятельность ЛУ №084 от 03.04.00.
http://rcd.ru E-mail: borisov@rcd.ru